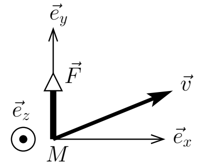
MÉCANIQUE ET ANALYSE DIMENSIONNELLE

I. Écran cathodique d'oscilloscope

1. On applique le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) à l'électron M de masse m dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$, supposé galiléen, en négligeant le poids des électrons :



$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = -eE_0\vec{e}_y$$

Il s'agit d'un mouvement uniformément accéléré.

On projette sur $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et on intègre en fonction des conditions initiales $\overrightarrow{OM} = \vec{0}$ et $\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = v_0\,\vec{e}_x$ pour obtenir les lois horaires :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \ddot{x} &=& 0 \\ \ddot{y} &=& -\frac{eE_0}{m} \\ \ddot{z} &=& 0 \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} &=& v_0 \\ \dot{y} &=& -\frac{eE_0}{m}\,t \\ \dot{z} &=& 0 \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{rcl} x &=& v_0\,t \\ y &=& -\frac{eE_0}{2m}\,t^2 \\ z &=& 0 \end{array}\right.$$

L'équation intrinsèque s'obtient en éliminant le temps : $t = \frac{x}{v_0}$ donc $\boxed{y = -\dfrac{eE_0}{2mv_0^2}\,x^2}$.

Remarque : Le champ E_0 doit être négatif pour respecter le schéma.

2. On a trouvé ci-dessus $\vec{v} = v_0\vec{e}_x - \frac{eE_0}{m}\,t\,\vec{e}_y$. Le passage au point A à l'instant t_A correspond à $x(t_A) = v_0 t_A = \ell$ donc $t_A = \frac{\ell}{v_0}$, d'où la vitesse $\vec{v}_A = v_0\vec{e}_x - \frac{eE_0\ell}{mv_0}\,\vec{e}_y$. Ainsi l'angle α vérifie

$$\tan\alpha = -\frac{eE_0\ell}{mv_0^2} \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{\alpha = \arctan\left(-\frac{eE_0\ell}{mv_0^2}\right)}.$$

Remarque : ce résultat peut aussi s'obtenir en utilisant l'équation intrinsèque $y = f(x)$ ci-dessus, en calculant la pente $f'(x=\ell) = \tan\alpha$.

3. Géométriquement on observe que $\delta = y_B = y_A + \overline{HB}$ avec $y_A = -\frac{eE_0}{2m}\,t^2 = -\frac{eE_0\ell^2}{2mv_0^2}$ et $BH = 2\ell\tan\alpha = -\frac{2eE_0\ell^2}{mv_0^2}$. Finalement après simplification $\boxed{\delta = -\dfrac{5eE_0\ell^2}{2mv_0^2}}$.

4. On a donc [1]

$$\delta = \frac{5eu\ell^2}{2dmv_0^2} \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{u = \frac{2dmv_0^2\delta}{5e\ell^2}} = \underline{1,3\,\mathrm{kV}}.$$

1. Il manquait (par erreur) la masse de l'électron dans l'énoncé... ordre de grandeur à connaître : $m_e \approx 9\times10^{-31}$ kg $\sim 1\times10^{-30}$ kg.

II. Le vol du colibri *(d'après IPHO 2006)*

1. On cherche une loi sous la forme $\mathcal{P} = m^a g^b S^c \rho^d$ où a, b, c et d sont des réels.
On a les dimensions suivantes :

$$[m] = M \quad,\quad [g] = L.T^{-2} \quad,\quad [S] = L^2 \quad,\text{ et}\quad [\rho] = M.L^{-3} \quad\text{donc}\quad [\mathcal{P}] = M^{a+d}.L^{b+2c-3d}.T^{-2b}.$$

Il y a donc 4 paramètres à déterminer pour seulement 3 dimensions, ce qui conduit au système

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+d &=& 1 \\ b+2c-3d &=& 2 \\ -2b &=& -3 \end{array}\right.$$

qui admet une infinité de solution (car il manque une équation). **Il faut donc faire une hypothèse supplémentaire.**
On peut se douter que **le résultat doit dépendre en réalité du poids** mg du colibri plutôt que de m et g indépendamment. Cela implique que $a = b$. Le système des 4 équations conduit alors à

$$a = b = \frac{3}{2} \quad,\quad c = d = -\frac{1}{2} \quad\text{d'où}\quad \boxed{\mathcal{P} = k\sqrt{\frac{(mg)^3}{S\rho}}} \quad\text{avec } k \text{ sans dimension}.$$

Sans données supplémentaires on prend $k = 1$ ce qui donne $\underline{\mathcal{P} \approx 0,3\,W}$.

2. Notons p_c le pouvoir calorifique massique du sucre et m_s la masse de sucre à consommer pour une durée $\Delta t = 1\,\mathrm{h}$ de vol . La quantité d'énergie en jeu s'écrit

$$\mathcal{P}\,\Delta t = m_s\,p_c \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{m_s = \frac{\mathcal{P}\,\Delta t}{p_c}} = \underline{0,06\,\mathrm{g}}.$$

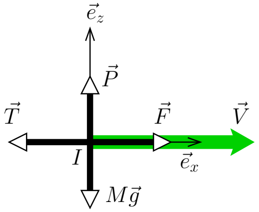
III. Avion solaire autonôme ***(d'après IPHO 2012)***

III.1. Lien entre puissance et masse de l'avion

1. On note I le centre d'inertie de l'avion.

La vitesse étant constante dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ supposé galiléen, le Théorème de la Résultante Cinétique (TRC) implique que la somme des forces est nulle :

$$M\,\vec{a}_{I/\mathcal{R}} = \vec{0} = M\vec{g} + \vec{P} + \vec{F} + \vec{T}$$



En prenant une vitesse horizontale $\vec{V}$ comme ci-contre, on obtient

$$F = \frac{1}{2}\rho S C_T V^2 \qquad (1)$$

$$Mg = \frac{1}{2}\rho S C_P V^2 \qquad (2)$$

2. La puissance de la force motrice $\vec{F}$ au cours d'un déplacement $\Delta X \vec{u}_x$ pendant une durée Δt s'écrit en fonction du travail W :

$$\mathcal{P} = \frac{W}{\Delta t} = \frac{F\Delta X}{\Delta t} = F.V$$

L'Eq. (2) donne la vitesse en fonction du poids :

$$V = \sqrt{\frac{2Mg}{\rho S C_P}} \qquad (3)$$

L'Eq. (1) conduit à $\mathcal{P} = \frac{1}{2}\rho S C_T V^3$, d'où avec l'Eq. (3)) et après simplification :

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{1}{f}\sqrt{\frac{2(Mg)^3}{\rho S C_P}}} \quad \text{avec} \quad f = \frac{C_P}{C_T}. \qquad (4)$$

3. La masse volumique de l'air décroît lorsque l'altitude augmente, donc $\mathcal{P}$ augmente (car g décroît beaucoup moins vite [2] que ρ). **Il est plus difficile de voler en altitude** au sens où cela consomme plus d'énergie par unité de temps.

4. D'après le résultat précédent et les données, on trouve

$$\boxed{\frac{\mathcal{P}_{\text{Mars}}}{\mathcal{P}_{\text{Terre}}} = \sqrt{\frac{g_{\text{Mars}}^3\,\rho_{\text{Terre}}}{g_{\text{Terre}}^3\,\rho_{\text{Mars}}}}} \approx \underline{2,1}\,.$$

En définitive, **il est donc plus facile de voler sur Terre que sur Mars**, car l'atmosphère y est plus dense.

III.2. Lien entre puissance et surface des ailes

5. *L'insolation dépend non seulement de l'heure dans la journée mais aussi de la saison (position de l'axe de rotation de la Terre par rapport au plan de l'écliptique) et de la latitude. Par conséquent l'insolation moyenne journalière sur Terre est une moyenne sur une journée, mais aussi sur une année et sur toutes les latitudes. Comme il n'est pas question ici de modéliser la dépendance saisonnière et en latitude,* ***on supposera que le choix du mois de mai et des moyennes latitudes (Lausanne) est représentatif de la moyenne annuelle et en latitude.***

2. L'expression du champ de gravitation en fonction de z serait $G(z) = \frac{\mathcal{G}M_T}{(R_T+z)^2} = g_0\,\frac{R_T^2}{(R_T+z)^2}$ où $g_0 \approx g$ est le champ gravitationnel à la surface. Comme $z \ll R_T$ dans notre problème, les variations de g sont imperceptibles par rapport aux variations de ρ dans l'expression de $\mathcal{P}$.

Il reste donc à prendre la moyenne journalière de la courbe donnée. La définition continue de la moyenne d'une fonction sur une durée T (ici $T = 24\,\text{h}$) est analogue à une moyenne discrète, l'intégrale remplaçant la somme discrète :

$$I_m = \frac{1}{T}\int_0^T I(t)\mathrm{d}t\,.$$

Le graphe propose d'assimiler cette courbe, là où elle est non nulle, à une portion (positive) de sinusoïde de période $2T_{\text{day}}$ entre $t_\ell \approx 6\,\text{h}$ et $t_c = t_\ell + T_{\text{day}} \approx 20\,\text{h}$ ($T_{\text{day}} \approx 14\,\text{h}$) et de maximum $I_{\max} \approx 950\,\text{W.m}^{-2}$:

$$I_m = \frac{1}{T}\int_{t_\ell}^{t_c} I(t)\mathrm{d}t \quad \text{avec} \quad I(t) = I_{\max}\,\sin\left(\frac{2\pi(t-t_\ell)}{2T_{\text{day}}}\right),$$

ce qui conduit à

$$I_m = \frac{1}{T}\int_0^{T_{\text{day}}} I_{\max}\,\sin\left(\frac{2\pi t}{2T_{\text{day}}}\right) \quad \text{ce qui donne} \quad \boxed{I_m = \frac{2I_{\max}}{\pi}\,\frac{T_{\text{day}}}{T}} \approx \underline{3,5\times 10^2\,\text{W.m}^{-2}}$$

6. La puissance $\mathcal{P}$ calculée en vitesse constante et donnée par l'Eq. (4) dépend de la taille ℓ de l'avion via sa masse M (pour des matériaux de masse volumique donnée), et la surface S de ses ailes (portance et force de frottement) :

- M est proportionnelle à ℓ^3, ce que l'on note $M\#\ell^3$;
- $S\#\ell^2$;
- d'où $\mathcal{P}\#\ell^{\frac{7}{2}}$.

Or l'avion tire sa puissance du rayonnement solaire, dont il reçoit la puissance $\mathcal{P}_{\text{sol}} = IS$ proportionnelle à S donc à ℓ^2. Ainsi le rapport entre les deux puissances

$$\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_{\text{sol}}}\#\ell^{\frac{7}{2}-2} = \ell^{\frac{3}{2}}$$

croît si ℓ croît. Il est donc **préférable d'avoir un avion petit** s'il doit être uniquement alimenté par la puissance du rayonnement solaire.

7. On doit avoir en moyenne la puissance solaire qui parvient à fournir au minimum la puissance $\mathcal{P}$ nécessaire pour le vol, donc

$$\mathcal{P} = r\,\mathcal{P}_{\text{sol}} = r\,I\,S \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{r = \frac{\mathcal{P}}{IS}} = \underline{9,3\,\%}\,,$$

en utilisant l'Eq. (4) et les données du problème pour *Solar Impulse* (on suppose un vol près de la surface en l'absence de données supplémentaires).

Remarque : on pourrait interpréter le problème autrement, en demandant que la puissance solaire moyenne reçue soit suffisante pour utiliser les moteurs à leur puissance maximale $\mathcal{P}_m$. Cela est beaucoup plus contraignant et conduirait à

$$\boxed{r = \frac{4\mathcal{P}_m}{\mathcal{P}_{\text{sol}}}} = \underline{48\,\%}\,.$$

8. D'après les questions précédentes, si le rendement est plus faible il faut abaisser le rapport $\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_{\text{sol}}}$ donc **diminuer la taille de l'avion**.

III.3. Vol de nuit

9. On suppose que l'on vole à basse altitude ($\rho = 1,2\,\text{kg.m}^{-3}$). Les batteries, de masse totale $M_b = 400\,\text{kg}$, doivent fournir la puissance $\mathcal{P}$ pendant la durée Δt, grâce à une quantité d'énergie stoquée M_bQ (avec $Q = 0,1\times 3600\,\text{kJ} = 360\,\text{kJ}$) :

$$M_bQ = \mathcal{P}\Delta t \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{\Delta t = \frac{M_bQ}{\mathcal{P}}} \quad \text{avec} \quad \mathcal{P} = \frac{1}{f}\sqrt{\frac{2(Mg)^3}{\rho S C_P}} \quad \text{ce qui donne} \quad \underline{\Delta t = 31\times 10^3\,\text{s} = 8\text{h}39\text{min}}\,.$$

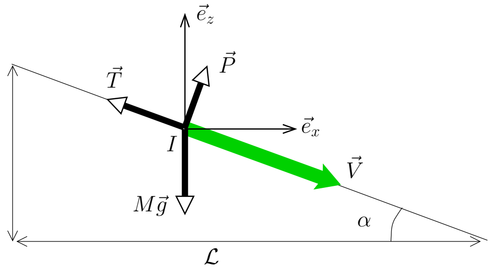
10. De nouveau le mouvement est supposé rectiligne uniforme donc le TRC, sans force motrice, s'écrit maintenant :

$$\vec{0} = M\vec{g} + \vec{P} + \vec{T}\,. \qquad (5)$$

La vitesse et la force de traînée sont inclinées d'une angle α par rapport à l'horizontale (cf ci-contre). La projection selon $\vec{u}_x$ donne alors

$$0 = -\frac{1}{2}\rho S C_T V^2 \cos\alpha + \frac{1}{2}\rho S C_P V^2 \sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad \tan\alpha = \frac{C_T}{C_P} = \frac{1}{f}\,. \qquad (6)$$



Or l'angle α permet aussi de relier la chute d'altitude h à la distance horizontale parcourue $\mathcal{L}$:

$$\tan\alpha = \frac{h}{\mathcal{L}} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\mathcal{L} = fh}\,. \qquad (7)$$

11. Pendant sa chute d'une hauteur h, l'avion perd l'énergie potentielle $\Delta E_p = Mgh$.
S'il a avait utilisé ses moteurs en vol horizontal, il aurait utilisé un travail $W_\text{h} = F\mathcal{L}$, que l'on peut expliciter à l'aides des Eqs. (1)-(2) (ou de l'Eq. (1) et l'Eq. (3) :

$$F = \frac{1}{2}\rho S C_T V^2 = \frac{C_T}{C_P}\frac{1}{2}\rho S C_P V^2 = \frac{Mg}{f}\,.$$

Ainsi le rapport entre les deux consommations énergétiques pour la même distance $\mathcal{L}$ (en vol plané ou motorisé) est, en utilisant l'Eq. (7) :

$$\boxed{\frac{\Delta E_p}{W} = \frac{Mghf}{Mg\mathcal{L}} = 1}\,.$$

Cela signifie que la consommation d'*énergie gravitationnelle* en vol plané est aussi efficace que la consommation d'énergie électrique pour parcourir une distance horizontale donnée.
Ce résultat **ne dépend pas de l'altitude**.

12. Pendant une durée Δt, l'avion parcourt une distance horizontale $\mathcal{L}$ à vitesse constante $\vec{V}$ inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale : $\mathcal{L} = V\cos\alpha\,\Delta t$ et par ailleurs $\mathcal{L} = fh$ d'après l'Eq. (7).
On en déduit

$$\Delta t = \frac{fh}{V\cos\alpha} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\cos\alpha} = \sqrt{1+\tan^2\alpha} = \sqrt{1+\frac{1}{f^2}} \approx 1 \quad \text{car} \quad f \approx 50\,.$$

Quant à la vitesse, on la calcule en projetant l'Eq. (5) (TRC) selon $\vec{e}_z$:

$$\begin{aligned} Mg &= \tfrac{1}{2}\rho S V^2 (C_T \sin\alpha + C_P\cos\alpha) = \tfrac{1}{2}\rho S V^2 C_P \cos\alpha\,(\tfrac{C_T}{C_P}\tan\alpha + 1) \\ &\overset{(6)}{=} \tfrac{1}{2}\rho S V^2 C_P \cos\alpha\,(\tfrac{1}{f^2}+1) \approx \tfrac{1}{2}\rho S V^2 C_P \quad \text{car} \quad f \approx 50\,. \end{aligned}$$

On retrouve donc $V \approx \sqrt{\frac{2Mg}{\rho S C_P}}$ comme quand $\alpha = 0$ (Eq. (3)).
On constate que la vitesse dépend de l'altitude via ρ, ce qui implique une contradiction : la vitesse ne peut être réellement considérée constante dans cette situation où l'avion perd beaucoup d'altitude. Pour garder une approche simple on peut évaluer une « vitesse moyenne » en faisant la moyenne entre le début et la fin de la chute :

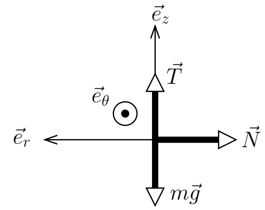
$$V_m = \frac{1}{2}\left(V_{z=h} + V_{z=0}\right) \quad \text{en prenant} \quad \rho(z) = \rho_0.e^{-\frac{z}{H}} \quad \text{et} \quad \rho_0 = 1{,}2\,\text{kg.m}^{-3}\,.$$

On obtient

$$\underline{V_m = 7\,\text{m.s}^{-1}} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\Delta t \approx \frac{fh}{V_m}} = \underline{68\times 10^3\,\text{s} \approx 19\,\text{h}}\,.$$

IV. Le « Rotor » *(d'après IPHO 2015)*

On considère un passager de masse m, de centre de masse M, plaqué contre la paroi verticale et ne glissant pas vers le bas. Il est donc immobile par rapport au rotor, mais en mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire ω, dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$.
Le passager est soumis à son poids $m\vec{g}$, la réaction normale de la paroi $\vec{N}$ (centripète) et la réaction tangentielle $\vec{T}$ (dirigée vers le haut pour s'opposer au poids). On note (Oz) l'axe de rotation du rotor, vertical.



Le Théorème de la Résultante Cinétique appliqué à M dans $\mathcal{R}$ supposé galiléen s'écrit, dans la base cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$:

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} \quad \Leftrightarrow \quad -mR\omega^2\,\vec{u}_r = -mg\vec{u}_z - N\vec{u}_r - T\,\vec{u}_z$$

en notant [3] $N = ||\vec{N}||$ et $T = ||\vec{T}||$. En projetant dans la base on obtient

$$N = mR\omega^2 \quad \text{et} \quad T = mg\,.$$

La loi de Coulomb du frottement solide dans le cas non glissant s'écrit alors :

$$||\vec{T}|| \le f||\vec{N}|| \quad \Leftrightarrow \quad T \le fN \quad \Rightarrow \quad mg \le f\,mR\omega^2 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{R \ge \frac{g}{f\omega^2}} = \underline{2{,}0\,\text{m}}\,.$$

3. Le fait que $\vec{T}$ soit uniquement selon $\vec{u}_z$ vient du fait que le mouvement est uniforme. Dans le cas contraire $\ddot{\theta} \neq 0$ donc l'accélération orthoradiale $a_\theta = R\ddot{\theta}$ est non nulle, et alors $\vec{T}$ aurait aussi une composante selon $\vec{u}_\theta$.