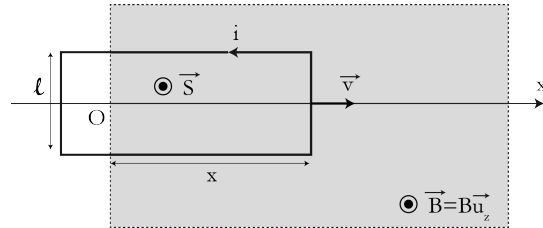


# INDUCTION

## I. Freinage d'une luge par induction (d'après ATS 2013)

1. a) On choisit une orientation pour le courant induit. Il en résulte un flux traversant la surface du cadre plongée dans le champ magnétique  $\vec{B} : \phi = B\ell x$ .



La loi de FARADAY donne :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -B\ell\dot{x}$$

- b) SCHEMA D'après la loi d'Ohm, on obtient :

$$i = \frac{e}{R_c} = -\frac{B\ell\dot{x}}{R_c}$$

- c) Seule la partie de cadre à l'abscisse  $x$  contribue à la force de Laplace induite exercée sur le cadre. En effet, sur les autres parties du cadre, soit il n'y a pas de champ magnétique, soit les forces se Laplace se compensent (cas des deux parties du cadre le long de l'axe  $(Ox)$ ). Ainsi, il reste :

$$\vec{F}_L = i\ell B\vec{u}_x \Rightarrow \vec{F}_L = -\frac{(B\ell)^2}{R_c}\dot{x}\vec{u}_x$$

Rmq : La force de Laplace est de la forme  $\vec{F}_L = -\frac{(B\ell)^2}{R_c}\vec{v}$ , c'est-à-dire qu'elle s'oppose bien au mouvement, linéairement en vitesse, de la même manière que le ferait un frottement fluide.

- d) On applique le Théorème de la Résultante Cinétique (TRC) au système {luge} dans le référentiel  $\mathcal{R}$  galiléen :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = m\vec{g} + \vec{R}_N + \vec{F}_L$$

où  $\vec{R}_N$  désigne la réaction normale du sol (pas de frottements). Par projection sur les axes cartésiens de la base directe  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ , il vient, puisque la luge ne décolle pas :

$$\begin{cases} m\dot{x} = -\frac{(B\ell)^2}{R_c}\dot{x} \\ \dot{y} = 0 \\ 0 = -mg + R_N \end{cases}$$

Ainsi,  $\dot{y} = \text{constante} = 0$  et  $y = \text{constante} = 0$  compte tenu des conditions initiales. Le mouvement de la luge reste donc rectiligne, selon l'axe  $(Ox)$  (intersection des plans  $x = 0$  et  $z = 0$ ).

- e) L'équation différentielle en  $v = \dot{x}$  s'écrit :

$$\dot{v} + \frac{B^2\ell^2}{mR_c}v = 0 \quad \text{on pose} \quad \tau = \frac{mR_c}{B^2\ell^2} = 0,4 \text{ s.}$$

- f) On résout l'équation différentielle en utilisant la condition initiale  $v(t = 0) = v_a$  :

$$v(t) = v_a e^{-t/\tau}$$

On intègre l'expression de  $v = \dot{x}$  avec la condition initiale  $x(0) = 0$  :

$$x(t) = \tau v_a (1 - e^{-t/\tau})$$

- g)  $\diamond$  Le cadre entre dans la zone de champ en  $t = 0$  et en ressort en  $T$  tel que  $x(T) = L$  :

$$L = \tau v_a (1 - e^{-T/\tau}) \Rightarrow \ln\left(1 - \frac{L}{\tau v_a}\right) = -\frac{T}{\tau} \Rightarrow T = \tau \ln\left(\frac{\tau v_a}{\tau v_a - L}\right) = -\tau \ln\left(1 - \frac{L}{\tau v_a}\right) = 35 \text{ ms}$$

- $\diamond$  On détermine alors  $v(T)$  :

$$v(T) = v_a \left(1 - \frac{L}{\tau v_a}\right) = v_a - \frac{L}{\tau}$$

On en déduit la perte de vitesse par freinage par induction lorsque la luge pénètre dans la zone de champ :

$$\Delta v = v(0) - v(T) = \frac{L}{\tau} = 2,5 \text{ m.s}^{-1}$$

2.  $\diamond$  Une fois que le cadre est entièrement dans la zone soumise au champ magnétique, il n'y a plus de variation de flux magnétique et donc plus de force de LAPLACE induite. La luge continue alors en mouvement rectiligne uniforme. Sa vitesse est :
- $$v = v_a - \frac{L}{\tau} = 27,5 \text{ m.s}^{-1}$$

- $\diamond$  Il est inutile de générer une zone de champ de longueur  $L_B > L$  car il n'y a plus aucun ralentissement de la luge une fois le cadre totalement rentré dans la zone de champ. On choisit donc **au maximum**  $L_B = L$ .

Rmq : Pour ce qui est du critère de «longueur idéale», celui-ci est vague et non précisé dans l'énoncé. On pourrait envisager de prendre une zone de champ de longueur un peu inférieure à  $L$  puisque la décélération de la luge est de moins en moins efficace au cours du temps ( $\dot{v} = -\tau v_a e^{-t/\tau}$ ), la force de freinage de Laplace étant directement proportionnelle à la vitesse (plus la vitesse est faible, plus la force de freinage est faible aussi). Tout dépend de la vitesse finale que l'on souhaite atteindre.

3. Lorsque le cadre conducteur sort de la zone de champ, le flux de  $\vec{B}$  à travers le cadre varie, et les phénomènes inductifs entraînent à nouveau un freinage de la luge par application de la loi de Lenz : par leurs effets, les phénomènes d'induction s'opposent à leur cause.

En effet, le flux magnétique (positif dans notre convention) va se réduire donc une fem et un courant induit dans le sens contraire vont apparaître. Mais comme c'est maintenant la côté gauche qui est dans la zone de champ, la force de Laplace sera toujours vers la gauche.

4.  $\diamond$  Ainsi, en sortant de la zone de champ la force de Laplace a exactement la même expression que précédemment en fonction de  $\dot{x}$ . Finalement l'équation différentielle est la même en sortant qu'en entrant dans la zone. À chaque zone de champ parcourue dans sa totalité, la perte de vitesse est donc de  $2\frac{L}{\tau}$ . Ainsi, à la sortie de la  $n$ -ième zone de champ, la vitesse de la luge est :

$$v_n = v_a - 2n\frac{L}{\tau}$$

On veut le nombre  $n$  de zones de champ pour atteindre la vitesse  $v_p$ , d'où :

$$n = \frac{\tau}{2L}(v_a - v_p) = 5$$

◊ Pour  $n$  zones de champ de longueur  $L$ , il faut ajouter  $n$  zones sans champ de même longueur que doit également parcourir la luge. Ainsi, la longueur totale de la zone de freinage doit être :

$$L_{tot} = 2nL = 10\text{ m}$$

*Rmq : La décélération semble importante et est probablement plus faible en pratique car le champ magnétique proposé est difficilement réalisable.*

## II. Motorisation d'un AutoFocus à courant continu (d'après Centrale PSI 2015)

### II.1. Principe d'une machine à courant continu à charge constante

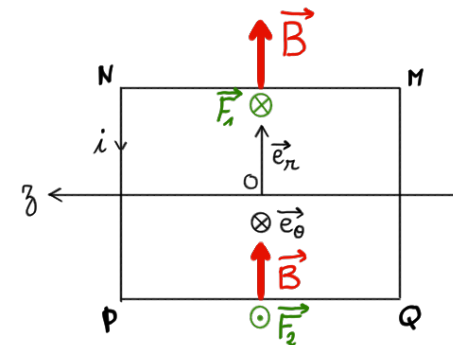
1.

a) Considérons la spire  $(MNPQ)$  représentée ci-contre, centrée sur l'origine  $O$  du repère. Le champ  $\vec{B}(\theta)$  est selon  $\vec{e}_r$  et de même sens dans tout le plan de la spire. Les résultantes  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  respectivement sur les segments  $MN$  et  $PQ$  sont

$$\vec{F}_1 = ibB_0 \cos \theta \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{F}_2 = -ibB_0 \cos \theta \vec{e}_\theta$$

En considérant  $i > 0$  sur le schéma, on obtient les directions de forces indiquées en vert.

Par ailleurs, compte-tenu de la géométrie du champ magnétique, la force de Laplace est nulle le long de  $NP$  et  $QM$ .



b) En suivant l'énoncé, on suppose la force appliquée au milieu de chaque segment, comme sur le schéma ci-dessus<sup>1</sup>. Le bras de levier étant  $\frac{a}{2}$ , le moment par rapport à l'axe  $Oz$  sur chaque côté est

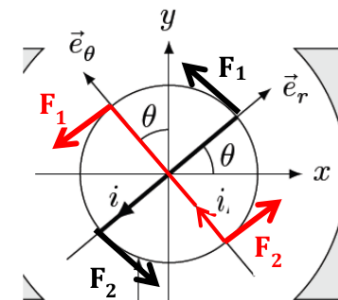
$$\mathcal{M}_{MN}^z = \mathcal{M}_{PQ}^z = \frac{a}{2} \cdot ibB_0 \cos \theta$$

Les contributions étant nulles sur les côtés  $NP$  et  $QM$ , on peut les additionner pour obtenir le moment résultant du couple (résultante nulle) sur la spire d'angle  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  (où  $\theta$  représente la position du point  $M$  de la spire) :

$$\Gamma_{\text{spire}} = iabB_0 \cos \theta.$$

Dans le cas où  $\theta \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$  ou  $[-\pi; -\frac{\pi}{2}]$ , il faut considérer l'effet du collecteur, qui inverse le sens du courant, ce qui permet d'avoir un moment de même signe (cf spire rouge ci-contre). Finalement on peut écrire en général :

$$\Gamma_{\text{spire}} = iabB_0 |\cos \theta|.$$



c) On remplace un calcul discret impossible ici par un calcul continu avec une intégrale. En supposant les spires uniformément réparties, le moment résultant sur le rotor complet est la valeur moyenne sur  $\theta$  du moment trouvé précédemment pour une spire multipliée par le nombre de spire  $N$  :

$$\Gamma_{em} = \frac{N}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} iabB_0 |\cos \theta| d\theta = \frac{4N}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} iabB_0 \cos \theta d\theta \quad \text{d'où} \quad \Gamma_{em} = K_0 i \quad \text{avec} \quad K_0 = \frac{2}{\pi} N ab B_0.$$

$K_0$  a la dimension d'un flux magnétique (unité Wb), à savoir :

$$[K_0] = \frac{[\Gamma_{em}]}{[i]} \quad \text{d'où} \quad [K_0] = M \cdot L^2 \cdot T^{-2} \cdot I^{-1}.$$

1. C'est un bon exercice de le redémontrer, en repartant de la définition du moment résultant sur chaque segment :

$$\vec{M}_{LMN} = \int_{MN} \vec{OP} \wedge (id\vec{OP} \wedge \vec{B}) = \int_{z=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (\frac{a}{2}\vec{e}_r + z\vec{e}_z) \wedge (idz\vec{e}_z \wedge B(\theta)\vec{e}_\theta) = \dots$$

2. En appliquant l'égalité de conversion électro-mécanique de puissance, on obtient la puissance cédée par la force électromotrice  $e$  pour un solide en rotation autour d'un axe fixe :

$$\mathcal{P}_{e_{\text{ind}}} = ei = -\mathcal{P}_L = -\Gamma_{em} \cdot \Omega = -K\dot{\theta}i\Omega$$

d'où l'on déduit par identification (car cela est valable en toute circonstance) :  $e = -K\dot{\Omega}$ .

Remarque : en fait ce raisonnement est faux car le couple moyen s'appliquant sur une seule spire est  $\Gamma_{em}/N = K/N \cdot i$ . Ceci conduit à  $e = -\frac{K}{N}\dot{\Omega}$ , ce qui implique que les résultats qui suivent devraient dépendre explicitement de  $N$ . L'énoncé original de Centrale est donc faux car  $N$  ne figure pas dans les expressions données de  $\tau$  et  $\Omega_{lim}$ , et la valeur de  $N$  n'est pas donnée. Ce n'est ni la première ni la dernière fois... On poursuit donc avec ces expressions !

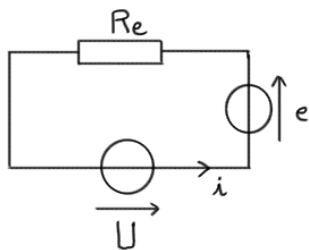
3.

Le circuit électrique équivalent à une seule spire est représenté ci-contre. La loi des mailles s'écrit

$$U = R_e i - e = R_e i + K\dot{\Omega}$$

avec  $\Gamma'_{em} = Ki$ , ce qui conduit à

$$\Omega = \frac{U}{K} - \frac{R_e}{K^2} \Gamma'_{em}$$



4. On applique le Théorème Scalaire du Moment Cinétique (TSMC) au rotor selon l'axe  $Oz$  :

$$J\dot{\Omega} = \Gamma'_{em} - \Gamma_r \quad \text{avec} \quad \Gamma'_{em} = Ki$$

L'équation électrique précédente permet d'éliminer  $i$  au profit de  $\Omega$  par

$$i = \frac{U}{R_e} - \frac{K}{R_e} \Omega$$

ce qui conduit à

$$\dot{\Omega} + \frac{1}{\tau} \Omega = \frac{1}{\tau} \Omega_{lim} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{JR_e}{K^2} \quad \text{et} \quad \Omega_{lim} = \frac{U}{K} - \frac{\Gamma_r R_e}{K^2}$$

La solution de cette équation linéaire d'ordre 1 à coefficients constants est donc la somme d'une solution particulière constante  $\Omega = \Omega_{lim}$  et de la solution générale  $\Omega = \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$ . Dans les conditions initiales  $\Omega(t=0) = 0$  donc

$$\Omega(t) = \Omega_{lim} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Comme  $\Omega = \dot{\theta}$ , on en déduit par intégration avec  $\theta(t=0) = 0$  que

$$\theta(t) = \Omega_{lim} t + \tau \Omega_{lim} (e^{-\frac{t}{\tau}} - 1)$$

5. L'équation différentielle précédente est modifiée car  $\Gamma'_{em} = Ki = 0$  pour  $t \geq t_0$ , donc

$$\dot{\Omega} = -\frac{\Gamma_r}{J}$$

La vitesse angulaire varie continûment car sinon l'énergie cinétique  $\frac{1}{2}J\Omega^2$  serait discontinue ce qui impliquerait une puissance reçue infinie. A fortiori  $\theta(t)$  est donc continue<sup>2</sup>. Donc on peut imposer les conditions de continuité

$$\Omega(t_0) = \Omega_{lim} (1 - e^{-\frac{t_0}{\tau}}) \quad \text{et} \quad \theta(t_0) = \Omega_{lim} t_0 + \tau \Omega_{lim} (e^{-\frac{t_0}{\tau}} - 1)$$

et la solution s'écrit alors

$$\Omega(t) = \Omega(t_0) - \frac{\Gamma_r}{J} (t - t_0) \quad \text{et} \quad \theta(t) = \theta(t_0) + \Omega(t_0) (t - t_0) - \frac{\Gamma_r}{2J} (t - t_0)^2$$

6. On impose l'arrêt à la date  $t_{mp}$  :

$$\Omega(t_{mp}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_{mp} = t_0 + \frac{J\Omega(t_0)}{\Gamma_r} \quad \text{avec} \quad \Omega(t_0) = \Omega_{lim} (1 - e^{-\frac{t_0}{\tau}})$$

Comme on a  $t - t_0 = \frac{J\Omega(t_0)}{\Gamma_r}$  ceci conduit après simplification à

$$\theta(t_{mp}) = \theta_{mp} = \theta(t_0) + \frac{J\Omega(t_0)^2}{2\Gamma_r}$$

où  $\theta(t_0)$  est donné dans la question précédente.

## II.2. Application au moteur à courant continu DN12M de la marque Canon®

7. La droite donnant  $i$  a pour équation  $i = \frac{\Gamma'_{em}}{K}$ . On mesure l'inverse de sa pente :

$$K = \frac{1,1 \times 10^{-3}}{0,40} = 2,8 \times 10^{-3} \text{ Wb.}$$

La droite donnant  $\Omega$  est d'équation  $\Omega = \frac{U}{K} - \frac{R_e}{K^2} \Gamma'_{em}$ . On mesure graphiquement sa pente  $p = -\frac{R_e}{K^2}$  ce qui donne

$$R_e = K^2 |p| = (2,75 \times 10^{-3})^2 \cdot \frac{12 \times 10^3 \times \frac{2\pi}{60}}{1,3 \times 10^{-3}} = 7,3 \Omega$$

8. Le couple de démarrage correspond à  $\Omega = 0$  donc au point d'intersection avec l'axe des abscisses :

$$\Gamma_D = 1,3 \times 10^{-3} \text{ N.m.}$$

Son expression théorique vérifie

$$\Omega = 0 = \frac{U}{K} - \frac{R_e}{K^2} \Gamma_D \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma_D = \frac{KU}{R_e} \quad \Leftrightarrow \quad U = \frac{R_e \Gamma_D}{K} = 3,5 \text{ V}$$

On peut aussi déterminer  $U$  via l'ordonnée à l'origine  $\Omega_0 = \frac{U}{K}$  de cette même caractéristique :

$$U = K\Omega_0 = 2,75 \times 10^{-3} \times 12 \times 10^3 \times \frac{2\pi}{60} = 3,5 \text{ V.}$$

9. On obtient  $\tau = \frac{JR_e}{K^2} = 23 \text{ ms.}$

2. en tant que primitive d'une fonction continue

10. Le point de fonctionnement en régime stationnaire est donné par la caractéristique  $\Omega = f(\Gamma'_{em})$  et la condition imposée par la charge via le TSMC à savoir  $\Gamma'_{em} = \Gamma_r$ .  
*Il faut donc connaître la charge  $\Gamma_r$  pour pouvoir répondre... information donnée dans la question d'après...*  
On suppose la charge connue :  $\Gamma_r = 0,5\Gamma_D = 6,5 \times 10^{-4}$  N.m. On en déduit la vitesse

$$\Omega_{lim} = \frac{U}{K} - \frac{R_e}{K^2} \Gamma_r = \underline{6,3 \times 10^2 \text{ rad.s}^{-1}}.$$

On en déduit la puissance

$$\mathcal{P}_{em} = \Gamma'_{em} \cdot \Omega_{lim} = \Gamma_r \cdot \Omega_{lim} = \underline{0,41 \text{ W}}.$$

11. En rassemblant les valeurs numériques trouvées précédemment, on obtient d'après la question 5. :

$$\theta(t_0) = \underline{48,5 \text{ rad} \approx 7,7 \text{ tr}}.$$

et d'après la question 6. :

$$\theta_{mp} = \underline{52,0 \text{ rad} \approx 8,3 \text{ tr}}.$$