INDUCTION

CALCULATRICES AUTORISÉES

I. Freinage d'une luge par induction

Sur une luge glissant sur une piste de glace, le lugeur est allongé, sur le dos et les pieds en avant (figure 1). Les frottements sont négligeables devant les autres forces en jeu. On cherche alors à stopper la luge grâce à un dispositif de freinage par induction.

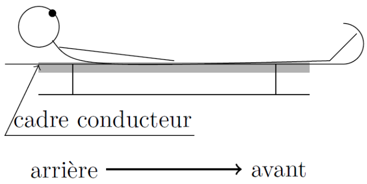

Figure 1 – Schéma du lugeur

Pour cela, un cadre métallique rigide, conducteur, de résistance totale $R_c = 1,0.10^{-3}\,\Omega$, rectangulaire, de côtés $\ell = 50,0\,\text{cm}$ et $L = 100\,\text{cm}$, est fixé sous la luge. Dans la zone de freinage, la piste est rectiligne horizontale selon l'axe Ox, dont l'origine O est fixée au début de la zone de freinage sur la ligne d'arrivée. L'axe Oz désigne la verticale ascendante, dont $\overrightarrow{u_z}$ est un vecteur unitaire (figure 2).

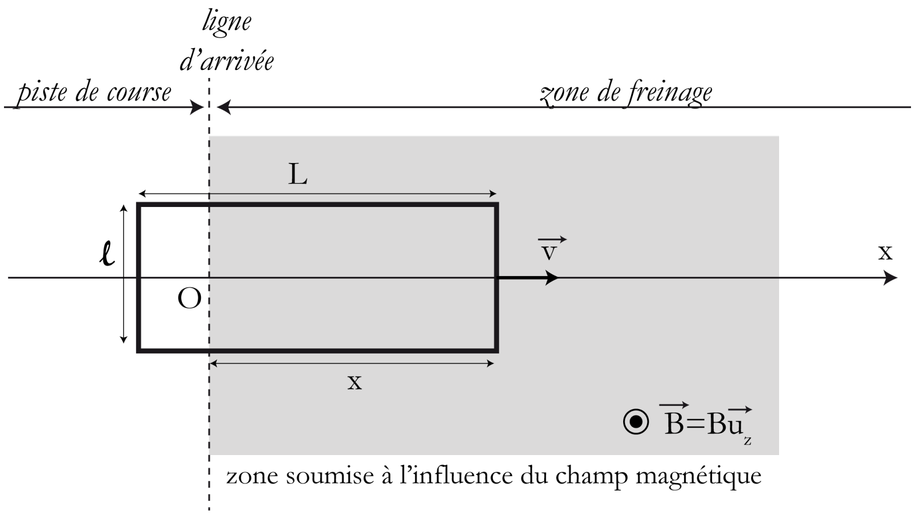

Figure 2 – Cadre conducteur entrant dans la zone magnétique

Un dispositif crée un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u_z}$ ($B = 1,00\,\text{T}$) sur toute la piste de décélération. Le cadre est repéré par sa position x comptée à partir de la ligne d'arrivée. À la fin de sa course (à la laquelle nous ne nous intéresserons pas ici), la luge franchit la ligne d'arrivée ($x = 0$) à la vitesse $\overrightarrow{v_a} = v_a\overrightarrow{u_x}$ avec $v_a = 30\,\text{m.s}^{-1}$ et entre dans la zone de freinage. Pour la modélisation, on assimile l'ensemble {luge avec cadre+lugeur} (désigné par la suite sous le terme simple de luge) à un solide de masse $m = 100\,\text{kg}$. Le problème est traité dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$, considéré galiléen. La norme du champ de pesanteur est prise égale à $g = 10\,\text{m.s}^{-2}$.

1. Dans cette question, on s'intéresse au mouvement du cadre lorsqu'il n'a pas entièrement pénétré dans la zone soumise à l'influence du champ magnétique $\overrightarrow{B}$ ($0 < x < L$).

a) Déterminer l'expression de la force électromotrice induite e qui apparaît dans le cadre, en fonction notamment de sa vitesse $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ selon (Ox). On n'oubliera pas de préciser les orientations du courant induit parcourant le cadre et de la f.é.m. induite e.

b) Le circuit électrique équivalent au cadre rectangulaire est constitué de la force électromotrice e et de la résistance R_c. On néglige l'inductance propre du cadre. Exprimer l'intensité i induite dans le cadre en fonction de $\dot{x}$ notamment.

c) Exprimer la force de Laplace $\overrightarrow{F_L}$ qui s'exerce sur le cadre, en précisant sa direction.

d) En considérant que la luge ne décolle pas de la piste, montrer qu'elle a un mouvement rectiligne sur l'axe (Ox) uniquement.

e) Exprimer l'équation différentielle qui porte sur la vitesse $v = \dot{x}$ de la luge sous forme canonique. On introduira un temps τ caractéristique du mouvement pour cette phase de pénétration dans la zone soumise au champ magnétique. Exprimer τ en fonction des paramètres, puis faire l'application numérique.

f) Déterminer la vitesse en fonction du temps et des conditions initiales.

g) Calculer, littéralement puis numériquement, la durée T que met le cadre de longueur L pour pénétrer entièrement dans la zone magnétique. En déduire la variation $\Delta v = v(0) - v(T)$ de la vitesse de la luge entre les instants $t = 0$ et $t = T$, en fonction de L et τ.
Faire l'application numérique de Δv.

2. Quelle est la vitesse de la luge une fois que le cadre est entièrement dans la zone soumise au champ magnétique ? Faire l'application numérique. En déduire la longueur idéale de la zone soumise au champ magnétique.

3. La zone soumise au champ magnétique n'occupe pas toute la piste de décélération mais est limitée à la longueur $L_B = L$, égale à la longueur du cadre. Décrire qualitativement ce qui se produit lorsque le cadre conducteur sort de cette zone.

4. On installe une alternance de zones magnétiques et non magnétiques, toutes de longueur $L_B = L$ et distantes de L. Déterminer la vitesse v_n de la luge lorsque le cadre est entièrement sorti de la n-ième zone magnétique. Exprimer (en fonction de τ, L, v_a et v_p) puis calculer numériquement le nombre n de zones magnétiques nécessaires pour que la vitesse de la luge diminue jusque $v_p = 5\,\text{m.s}^{-1}$, vitesse à partir de laquelle le lugeur peut freiner avec ses pieds.
Quelle est alors la longueur de la piste de ralentissement ?

II. Motorisation d'un AutoFocus à courant continu

L'AutoFocus (AF), ou mise au point automatique, permet de régler la netteté de l'image que donne un instrument d'optique. La plupart des appareils photographiques peuvent êtres couplés à des objectifs comportant une motorisation AF : un moteur (et un dispositif mécanique) va permettre de translater tout ou partie du dispositif optique le long de son axe.
L'objet de ce problème est d'évaluer la durée de mise au point AF avec une motorisation de type micro-moteur à courant continu.

II.1. Principe d'une machine à courant continu à charge constante

Le rotor est constitué d'un noyau de fer doux, cylindrique, sur lequel sont enroulées N spires. Chaque spire, représentée sur la figure (3), est rectangulaire, de longueur b suivant l'axe (Oz) vertical ascendant et de largeur a, et est enroulée sur le noyau parallèlement dans un de ses plans de symétrie. Les N spires sont réparties uniformément sur le périmètre du noyau. L'ensemble {noyau + spires} constitue le rotor. Chaque spire, de résistance R_e, est reliée à un générateur de tension continue U par l'intermédiaire de deux électrodes A et C et est parcourue par un courant d'intensité i constante. La position du rotor est repérée par l'angle θ de la base orthonormée directe cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. On notera $\Omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ la vitesse angulaire de rotation du rotor et J son moment d'inertie par rapport à (Oz). Un collecteur permet la commutation de A et C à chaque demi-tour du rotor, en $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$, si bien que le courant i circule toujours dans le même sens.

Le rotor est placé dans le champ magnétique stationnaire produit par les aimants permanents constituant le stator. On admettra que, dans le volume situé entre le stator et le noyau du rotor, ce champ est radial et de la forme $\vec{B} = B_0 \cos\theta \vec{e}_r$ (avec $B_0 > 0$). Le fer doux sera assimilé à un matériau magnétique linéaire, de perméabilité magnétique $\mu = \mu_r \mu_0$. On négligera tout phénomène d'autoinduction.

On suppose que le rotor entraîne une charge dont le couple résistant est $\vec{\Gamma}_R = -\Gamma_R \vec{e}_z$ où Γ_R est une constante positive. À l'instant $t = 0$, on a $\theta(t = 0) = 0$ et $\Omega(t = 0) = 0$.

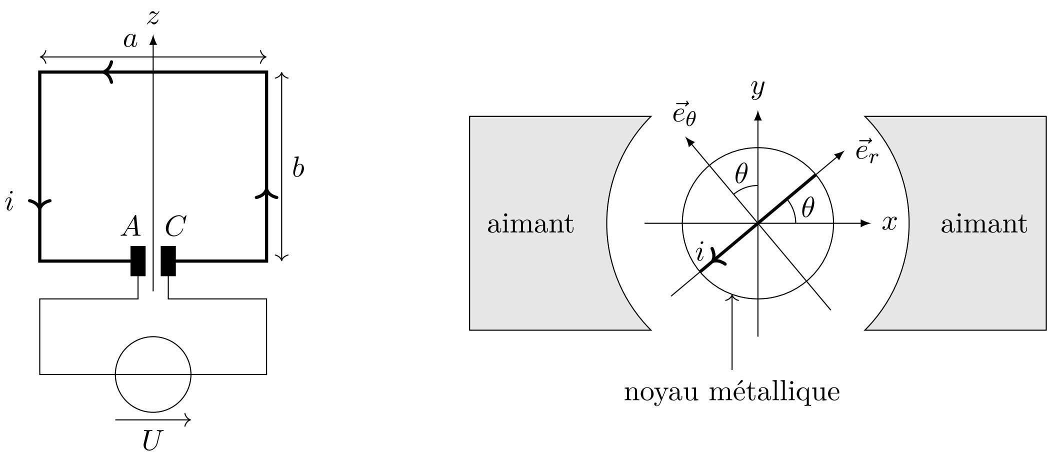

FIGURE 3 – Principe d'une MCC.

On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$ est $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

1. Dans un premier temps, on néglige les propriétés magnétiques du fer doux qui est alors assimilé à un milieu non magnétique.

a) On raisonne d'abord sur une spire située dans un plan formant un angle θ avec $\vec{e}_x$ comme sur la figure.
Exprimer les forces de Laplace résultantes $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ agissant respectivement sur chacun des côtés parallèles à l'axe Oz de la spire. On pourra faire un schéma et nommer les points.

b) En déduire l'expression du moment résultant électromagnétique associé aux forces de Laplace sur cette spire. Pour simplifier le calcul, on pourra admettre que chacune de ces forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ admet un point d'application au milieu du fil considéré, puisque la force élémentaire est homogène.

c) En déduire que le moment résultant total Γ_{em} par rapport à l'axe (Oz) du couple électromagnétique subi par le rotor complet (c'est-à-dire constitué des N spires) s'écrit

$$\Gamma_{em} = K_0\, i$$

où K_0 est une constante à déterminer en fonction de a, b, N et B_0. Quelle est la dimension de K_0 ?

Indication : les spires étant réparties uniformément sur le rotor, on utilisera pour cela un calcul de valeur moyenne sur la variable θ.

Désormais on prend en compte les propriétés magnétiques du fer doux, qui sera assimilé à un milieu magnétique linéaire de perméabilité magnétique $\mu = \mu_r\mu_0$ (avec $\mu_r \gg 1$). À l'intérieur du noyau, le champ magnétique $\vec{B}_s$ créé par le stator est approximativement uniforme et est orienté selon $\vec{e}_x$; on a ainsi $\vec{B}_s = B_s\vec{e}_x$ où $B_s > 0$. Les courants rotoriques, parcourant les spires du rotor, induisent créent alors dans le noyau un moment magnétique global $\vec{M}_r$ orienté selon l'axe (Oy) et proportionnel à l'intensité i du courant.
Ainsi on obtient finalement un moment résultant électromagnétique

$$\Gamma'_{em} = Ki \quad \text{avec} \quad K \gg K_0\,.$$

2. Déterminer la force électromotrice totale e induite dans le rotor en fonction de K et Ω.

3. Déterminer, en fonction de K, R_e et U, l'expression littérale de la caractéristique $\Omega = f(\Gamma'_{em})$ en régime permanent de fonctionnement et à tension d'induit U constante.

4. Établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse angulaire Ω. En déduire la loi d'évolution $\Omega(t)$ pour $t \geq 0$. Faire de même pour la loi $\theta(t)$. On posera $\tau = \dfrac{R_e J}{K^2}$ et $\Omega_{lim} = \dfrac{U}{K} - \dfrac{R_e\Gamma_R}{K^2}$.

5. À la date $t = t_0$, un système d'asservissement vient annuler le courant : $i(t = t_0) = 0$, de façon à ce que le moteur puisse s'arrêter. Déterminer les lois d'évolution $\Omega(t)$ et $\theta(t)$ pour $t \geq t_0$.

6. Pour faire la mise au point, le rotor initialement immobile doit tourner d'un angle θ_{mp}. À la date t_{mp}, $\theta(t = t_{mp}) = \theta_{mp}$ et le rotor est à l'arrêt. Exprimer θ_{mp} et la durée de mise au point t_{mp} en fonction de Γ_R, J, t_0, τ et Ω_{lim}.

II.2. Application au moteur à courant continu DN12M de la marque Canon®

7. En vous aidant de la figure (4), déterminer K et R_e pour le moteur mentionné ci-dessus.

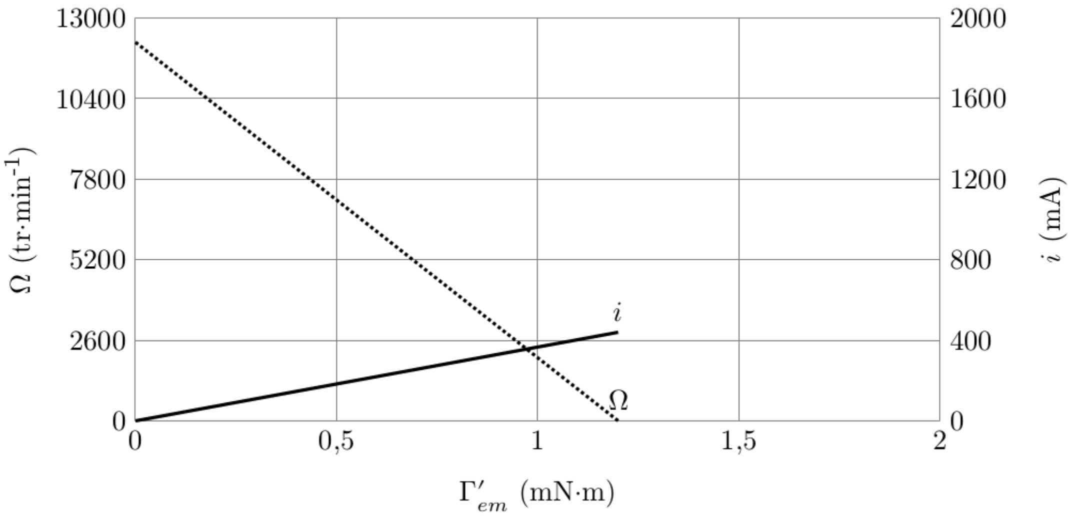

FIGURE 4 – Caractéristiques (Ω, Γ'_{em}) et (i, Γ'_{em}) en régime permanent à tension d'induit U constante

8. Toujours en vous aidant de la figure (4), déterminer le couple de démarrage Γ_D du moteur et la tension U.

9. On donne $J = 0,24\,\text{g.cm}^2$. Calculer τ.

10. Déterminer la puissance du moteur en régime permanent sachant que $\dfrac{\Gamma_R}{\Gamma_D} = 0,5$.

11. Pour une durée de mise au point t_{mp} de l'ordre de 100 ms (ordre de grandeur du temps de réponse d'un micromoteur à courant continu associé à un réducteur de vitesse installé dans un objectif Canon®), quel angle θ_{mp} peut-on espérer ?

* * * Fin de l'épreuve * * *