

# MÉCANIQUE ET THERMODYNAMIQUE

(Gaz, Statique, Premier Principe)

## I. Thermomètres à gaz (d'après ENS-Mines Ponts BCPST 2017)

### I.1. Définition de l'état gazeux

- On considère  $N$  particules de rayon  $r$  en mouvement dans un volume  $V$ . Une particule en mouvement vers sa future cible va parcourir une distance moyenne  $\ell$ , en balayant un cylindre de section  $^1 \pi r^2$ , et donc de volume  $V_c = \pi r^2 \ell$ . Si les cibles étaient fixes, on pourrait écrire que le volume total disponible est la somme des volumes  $V_c$ , ce qui donne un ordre de grandeur :

$$V = NV_c = N\pi r^2 \ell \Leftrightarrow \ell = \frac{1}{n^* \pi r^2}.$$

- La loi des gaz parfaits donne  $n^* = \frac{p}{k_B T} = \frac{p \mathcal{N}_A}{RT}$ . D'où  $\ell = \frac{RT}{p \mathcal{N}_A \pi r^2} \sim 1 \times 10^{-6} \text{ m}$  en prenant  $p \sim 1 \text{ bar}$ ,  $T \sim 3 \times 10^2 \text{ K}$ , et  $r \sim 10^{-10} \text{ m}$ .

- Chaque particule occupe en moyenne un volume  $\frac{V}{N}$ , dont on peut évaluer la taille en le considérant cubique d'arête  $d$ . On obtient

$$d^3 = \frac{V}{N} = \frac{1}{n^*} = \frac{RT}{p \mathcal{N}_A} \Leftrightarrow d = \sqrt[3]{\frac{RT}{p \mathcal{N}_A}} \sim 3 \times 10^{-9} \text{ m},$$

en prenant les mêmes conditions de pression et température. On observe que  $d \ll \ell$ .

- Plus généralement, le fluide tend à se comporter comme un gaz parfait si  $\ell \gg d \gg r$ . La première condition permet de négliger les collisions interparticulaires dans l'établissement de l'équilibre thermique, qui est donc avant tout établi via l'interaction avec les parois. La seconde condition permet de négliger les interactions intermoléculaires (forces de Van der Waals) et le volume propre des particules (effet de covolume).

### I.2. Thermomètre à variation de volume

- La sensibilité intrinsèque est définie comme le rapport entre des variations relatives de  $h$  d'une part, et de la température (ou pression) d'autre part. Les  $n$  moles de gaz emprisonnées dans le cylindre vérifient à l'équilibre  $PV = PhS = nRT$ . Donc en  $(P_0, T_0, V_0)$  on obtient

$$s_T^0 = \frac{T_0}{h_0} \left. \frac{\partial h}{\partial T} \right|_P = \frac{T_0}{h_0} \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{nRT}{PS} \right) = \frac{T_0 nR}{h_0 S P_0} = 1 \Leftrightarrow s_T^0 = 1.$$

$$s_P^0 = \frac{P_0}{h_0} \left. \frac{\partial h}{\partial P} \right|_T = \frac{P_0}{h_0} \frac{\partial}{\partial P} \left( \frac{nRT}{PS} \right) = -\frac{P_0 nRT_0}{h_0 S P_0^2} = -1 \Leftrightarrow s_P^0 = -1.$$

Autre méthode : avec la différentielle logarithmique.

- Pour  $P = \text{cte}$ , on  $\frac{h}{T} = \text{cte}$  donc  $\frac{dh}{h} - \frac{dT}{T} = 0 \Leftrightarrow \frac{T dh}{h dT} = 1 \Rightarrow s_T^0 = 1$ .
- Pour  $T = \text{cte}$ , on  $Ph = \text{cte}$  donc  $\frac{dh}{h} + \frac{dP}{P} = 0 \Leftrightarrow \frac{P dh}{h dP} = -1 \Rightarrow s_P^0 = -1$ .

On constate que ces sensibilités intrinsèques sont **indépendantes de l'état au voisinage duquel on utilise l'instrument**, ce qui est une propriété intéressante pour un instrument de mesure.

1. Un calcul plus précis utilise la section efficace de collision, qui prend en compte la taille de la cible. La section du volume collisionnel est alors  $\pi(2r)^2 = 4\pi r^2$ .

- On intègre la statique des fluides pour un gaz parfait de masse molaire moyenne  $M_a$  et de température uniforme  $T_a$ , de masse volumique  $\rho = \frac{M_a P}{RT}$ , dans un champ de pesanteur d'intensité  $g$  :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g z = -\frac{M_a P g}{RT_a} \Leftrightarrow \frac{d \ln P}{dz} = -\frac{M_a g}{RT_a} \Rightarrow P(z) = P_0 e^{-\frac{z}{H}} \text{ avec } H = \frac{RT_a}{M_a g} = 8,8 \text{ km}.$$

Au sommet du Mont Blanc on obtient  $P_m = 0,58 \text{ bar}$ .

- On considère que l'on lit la même hauteur  $h_i$  entre le moment de l'étalonnage (pression  $P_0$  et température  $T_i$ ) et la situation de mesure au sommet du mont blanc (pression  $P_m$  et température  $T$ ) :

$$\frac{nR}{S} = \frac{P_0 h_i}{T_i} = \frac{P_m h_i}{T} \Leftrightarrow T_i = \frac{P_0}{P_m} T = 182^\circ \text{C}$$

La pression étant quasiment divisée par 2, la température affichée serait donc approximativement doublée (en Kelvin).

- Les deux compartiments sont en équilibre de pression :

$$P_1 = P_2 \Leftrightarrow \frac{nRT}{Sh} = \frac{nRT_0}{S(2h_0 - h)} \Leftrightarrow \frac{T}{T_0} = \frac{h}{2h_0 - h} = \frac{h/h_0}{2 - h/h_0} \Leftrightarrow \frac{T}{T_0} - 1 = 2 \frac{h/h_0 - 1}{2 - h/h_0}$$

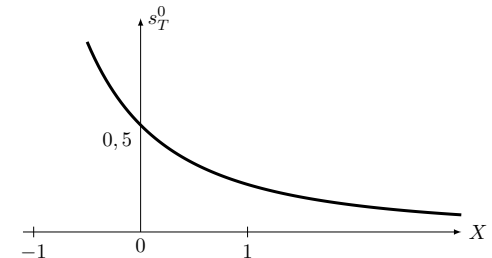
$$\Leftrightarrow X = \frac{2Y}{1 - Y} \Leftrightarrow Y = \frac{X}{X + 2}.$$

- On peut ré-exprimer :

$$s_T^0 = \frac{T_0}{h_0} \left. \frac{\partial h}{\partial T} \right|_P = \left. \frac{\partial h/h_0}{\partial T/T_0} \right|_P.$$

Ce thermomètre ne fonctionne pas rigoureusement à pression constante. Toutefois on peut évaluer la sensibilité à la température grâce à l'expression ci-dessus, ce qui donne simplement

$$s_T^0 = \frac{dY}{dX} = \frac{2}{(2 + X)^2}.$$



La sensibilité est donc plus faible que dans le cas du thermomètre à variation de volume pour des variations relatives modérées ( $|X| \ll 2$ ). D'autre part elle est fortement dépendante de l'état ( $X$ ), plus grande si  $X < 0$  que si  $X > 0$ , ce qui n'est pas pratique.

- On développe à l'ordre 2 :  $Y = \frac{X}{X+2} \approx \frac{X}{2} (1 - \frac{X}{2}) = \frac{X}{2} - \frac{X^2}{4}$ . L'écart relatif à l'approximation linéaire vaut :

$$\left| \frac{Y - \frac{X}{2}}{\frac{X}{2}} \right| = \left| \frac{\frac{X^2}{4}}{\frac{X}{2}} \right| = \left| \frac{X}{2} \right| < 0,1 \Leftrightarrow X \in [-0,2; 0,2].$$

Donc pour des graduations équi-réparties ( $Y = \frac{X}{2}$  supposé), la **précision relative est inférieure à 10% sur un domaine relativement large de  $\pm 60^\circ \text{C}$**  par rapport à la température d'étalonnage.

- On peut fixer une température de référence stable en utilisant un **point fixe thermodynamique**. Par exemple à la pression de 1 bar, le point de fusion de l'eau est à  $T = 0^\circ \text{C}$ , son point d'ébullition à  $T = 100^\circ \text{C}$ .

### I.3. Thermomètre à variation de pression

- À l'équilibre on peut écrire

$$P_1 V = nRT \text{ et } P_2 V = nRT_0 \Rightarrow P_1 - P_2 = \frac{nR}{V} (T - T_0) \Leftrightarrow \Delta P = \frac{nR}{V} \Delta T.$$

13. La résistance d'un conducteur est proportionnelle à la longueur parcourue par les porteurs de charge.  
 14. On définit (figure ci-dessous) les angles  $\alpha$  et  $\alpha'$  correspondant respectivement à la moitié de la jauge (taille  $\frac{L_0}{2}$ ) et la moitié de la membrane (taille  $a$ ). Pour les calculs, on considère  $r > 0$  comme sur ce schéma.

La taille de la membrane déformée est selon le côté choisi  $2(r \mp \frac{e}{2})\alpha'$  (- si  $i = 1$ , + si  $i = 2$ ).

La taille de la jauge déformée est selon le côté choisi  $L_i = 2(r \mp \frac{e}{2})\alpha$ . L'hypothèse d'une conservation des proportions se traduit par le fait que le rapport entre ces deux longueurs est le même en l'absence de déformation :

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{L_0}{2a}$$

Par ailleurs l'angle  $\alpha'$  est déterminé par la relation

$$\sin \alpha' = \frac{a}{r} \text{ avec } \sin \alpha' \approx \alpha' \text{ car } |r| \gg a$$

est valable pour les faibles déformations. En associant ces relations on obtient

$$L_i = 2 \left( r \mp \frac{e}{2} \right) \alpha = 2 \left( r \mp \frac{e}{2} \right) \frac{\alpha}{\alpha'} \alpha' = 2 \left( r \mp \frac{e}{2} \right) \frac{L_0}{2a} \frac{a}{r} = L_0 \left( 1 \mp \frac{e}{2r} \right) \Leftrightarrow \epsilon_i = \mp \frac{e}{2r} \Rightarrow R_i = R_0 \left( 1 \mp \frac{C e}{2r} \right)$$

avec - si  $i = 1$ .

15. En réunissant les résultats précédents :

$$\frac{\Delta R}{R_0} = \frac{R_1 - R_2}{R_0} = \frac{R_1 - R_0}{R_0} - \frac{R_2 - R_0}{R_0} = C \epsilon_1 - C \epsilon_2 = C \left( -\frac{e}{2r} - \frac{e}{2r} \right) = -C \frac{e}{r} = -C \frac{e}{K} \Delta P \text{ d'où}$$

$$\Delta P = -\frac{K}{eC} \frac{\Delta R}{R_0}$$

16. D'après la question précédente, on a besoin de mesurer  $R_1 - R_2$ . L'expression du pont se ramène approximativement à une différence  $R_C - R_B$  à condition de prendre  $R_D = R_A \gg R_B, R_C$ . On choisit donc

$$R_A = R_D \gg R_0, \quad R_C = R_1 \text{ et } R_B = R_2 \Rightarrow U \approx E_0 \frac{\Delta R}{R_A} = -\frac{E_0 R_0 e C}{R_A K} \Delta P$$

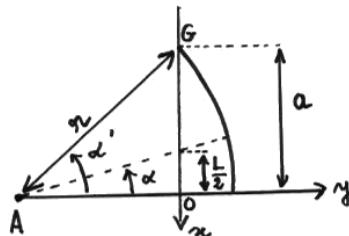
17. Comme  $\Delta P = \frac{nR}{V} \Delta T$ , on a alors  $U = -\frac{E_0 R_0 e C n R}{R_A K V} \Delta T$ .

D'après cette expression on a intérêt à prendre  $K$  petit (membrane plus souple) pour augmenter la sensibilité du thermomètre.

Toutefois si  $K$  est trop petit la déformation sera forte ( $r$  ne sera plus grand devant  $a$ ) et donc le lien entre  $\Delta T$  et  $U$  ne sera plus linéaire (cf question 14.).

18. Sur chaque moitié de membrane agissent d'une part une force d'appui ( $\vec{F}_H$  à droite) à une distance  $a$  de  $O$ , et d'autre part des forces de pression réparties uniformément. Pour une surface élémentaire  $dx dz$  au voisinage d'un point  $M(x, y = -\frac{e}{2}, z)$ , la force élémentaire appliquée est  $P_1 dx dz \vec{u}_y$ . De l'autre côté de la membrane, au voisinage d'un point  $M'(x, y = \frac{e}{2}, z)$ , la force élémentaire appliquée est  $-P_2 dx dz \vec{u}_y$ . Ainsi le moment résultant en  $O$  est

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= a \vec{u}_x \wedge F \vec{u}_y + \int_{x=0}^a \int_{z=-a}^a (x \vec{u}_x - \frac{e}{2} \vec{u}_y + z \vec{u}_z) \wedge P_1 dx dz \vec{u}_y - \int_{x=0}^a \int_{z=-a}^a (x \vec{u}_x + \frac{e}{2} \vec{u}_y + z \vec{u}_z) \wedge P_2 dx dz \vec{u}_y \\ &= a F \vec{u}_z + (P_1 - P_2) \left( \vec{u}_z \int_{x=0}^a \int_{z=-a}^a x dx dz + \vec{u}_x \int_{x=0}^a \int_{z=-a}^a z dx dz \right) \\ &= a F \vec{u}_z + (P_1 - P_2) \left( \vec{u}_z \int_0^a x dx \int_{-a}^a dz + \vec{u}_x \int_0^a dx \int_{-a}^a z dz \right) \\ &= a F \vec{u}_z + (P_1 - P_2) \left( \vec{u}_z \frac{a^2}{2} 2a + \vec{u}_x 2a \left( \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) \right) \end{aligned}$$



d'où  $\mathcal{M}_O = Fa + \Delta P a^3$ .

Remarque : le moment résultant des forces de pression s'écrit  $\frac{a}{2} \vec{u}_x \wedge (P_1 - P_2) 2a^2 \vec{u}_y$ , avec  $2a^2$  la surface totale de la partie droite de la membrane.  $(P_1 - P_2) 2a^2 \vec{u}_y$  étant la résultante des forces de pression, on en déduit que les actions de pression admettent un point d'application situé au milieu de la partie droite de la membrane, en  $x = \frac{a}{2}$  et  $z = 0$ .

19. Le théorème de la résultante cinétique appliqué à la membrane à l'équilibre dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen permet d'écrire

$$0 = \Delta P (2a)^2 + 2F \Leftrightarrow F = -\Delta P 2a^2 \Rightarrow \mathcal{M}_O = -a^3 \Delta P$$

20. S'agissant d'un couple, le moment résultant ne dépend pas du point d'application. On peut le calculer par exemple au centre de la section  $S_Q$  :

$$\mathcal{M} = k(\ell_2 - \ell_0) \frac{e}{2} - k(\ell_1 - \ell_0) \frac{e}{2} = 2k(\ell_2 - \ell_0) \frac{e}{2} = k(\ell_2 - \ell_0) e \text{ avec } \ell_2 = (r + \frac{e}{2}) \tan \alpha = \ell_0 + \frac{e}{2} \tan \alpha = \ell_0 + \frac{e \ell_0}{2r}$$

ce qui donne  $\mathcal{M} = k \ell_0 \frac{e^2}{2r}$ .

21. La section  $S_O$  est d'aire  $2ae$ , ce qui donne  $\mathcal{M} = E \frac{ae^3}{2r}$ .

22. Le théorème du moment cinétique, appliqué à la partie droite de la membrane au point  $O$  fixe dans le référentiel du laboratoire galiléen, se traduit par l'équilibre :

$$0 = \mathcal{M} + \mathcal{M}_O \Leftrightarrow a^3 \Delta P = E \frac{ae^3}{2r} \Leftrightarrow \Delta P = \frac{K}{r} \text{ avec } K = E \frac{e^3}{2a^2}$$

On observe que  $K$  est d'autant plus grand, donc la membrane d'autant plus rigide, que son épaisseur est grande ou que sa surface est petite.

#### I.4. Temps de réponse d'un thermomètre

23. Entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , le thermomètre est immobile et subit un transfert thermique dans des conditions isobares. Le premier principe s'écrit donc <sup>2</sup>

$$dH = \delta Q_p = \Phi dt \Leftrightarrow (C_{en} + C_{p \text{ gaz}}) dT = \frac{T_e - T}{R_{th}} \Leftrightarrow \tau_{\text{mod}} \frac{dT}{dt} + T = T_e \text{ avec } \tau_{\text{mod}} = R_{th} (C_{en} + C_{p \text{ gaz}})$$

24. Application numérique :  $\tau_{\text{mod}} = 7,5$  s.

25. Pour tout  $t \geq t_0$ , la solution générale s'écrit  $T(t) = \lambda e^{-\frac{t-t_0}{\tau_{\text{mod}}}} + T_{e2}$ , avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ . La continuité en  $t_0$  impose

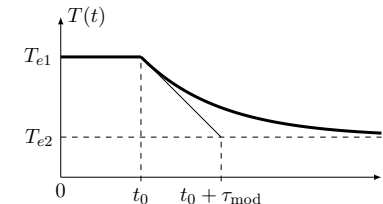
$$T(t_0) = T_{e1}, \text{ ce qui conduit à } T(t) = (T_{e1} - T_{e2}) e^{-\frac{t-t_0}{\tau_{\text{mod}}}} + T_{e2}$$

26. On obtient l'allure ci-contre.

27. D'après l'expression précédente, on a

$$T^*(t) = e^{-\frac{t-t_0}{\tau_{\text{mod}}}}$$

Ainsi, les deux tracés doivent se superposer si le modèle est valable. C'est le cas dans une large mesure, à l'exception des 5 premières secondes pour lesquelles les transferts thermiques par conduction ne suivent pas exactement le même profil.



2. Attention erreur d'énoncé... votre prof a oublié d'inverser la résistance thermique!  $\Phi = \frac{T_e - T}{R_{th}}$

28. Le plus simple est ici de mesurer  $\tau_{\text{exp}}$  grâce à 2 points :  $t_0$  et  $t_0 + \tau_{\text{exp}}$  par exemple. On doit avoir  $T^*(t_0 + \tau_{\text{exp}}) = \frac{1}{\exp(1)} \approx 0,37$ . Graphiquement on trouve  $t_0 \approx 4$  s et  $t_0 + \tau_{\text{exp}} \approx 17$  s, d'où  $\tau_{\text{exp}} \approx 13$  s. On trouve presque le double du temps du modèle  $\tau_{\text{mod}}$ . Ceci est probablement dû au caractère instationnaire du flux au début de l'expérience, qui met un certain temps à atteindre la valeur proposée dans le modèle.

## II. Force de pression dans un réservoir

1. Considérons un point courant  $M(x, y, z)$  sur le fond incliné situé à la distance  $X$  du centre  $O$ . On note  $(\vec{u}, \vec{n})$  la base orthonormée telle que  $\vec{OM} = X\vec{u}$  et  $\vec{n}$  est orthonormal au fond incliné dirigé vers le haut.

Sur une petite surface  $dS = dXdY$  au voisinage de  $M$  (avec  $dX > 0$ ), l'huile et l'air extérieur exercent une force élémentaire totale

$$d\vec{F}_p = -(P(z) - P_a) dS \vec{n}.$$

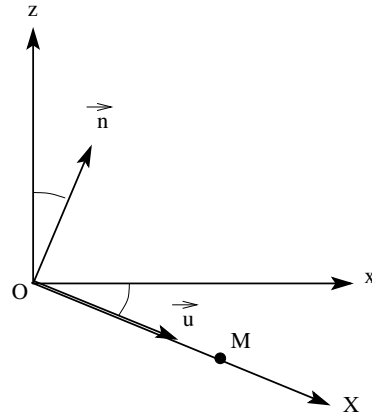
Le champ de pression dans l'huile est donné par la loi de l'hydrostatique dans le cas d'un axe vertical ascendant :

$$P(z) = P_a - \rho g(z - H_1).$$

Le long du fond, on a la relation  $X = -\frac{z}{\sin \alpha}$  car  $z < 0$ , et  $dX = -\frac{dz}{\sin \alpha}$ , ce qui permet de tout ramener à la variable  $z$  :

$$\begin{aligned} \vec{F}_p &= \int_{z=H_1-H_2}^0 \int_{y=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{1}{\sin \alpha} \rho g(z - H_1) dz dy \vec{n} \\ &= \frac{\rho g L}{\sin \alpha} \vec{n} \int_{H_1-H_2}^0 (z - H_1) dz \quad \text{d'où} \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{F}_p = -\frac{\rho g L (H_2^2 - H_1^2)}{2 \sin \alpha} \vec{n} \quad \text{avec} \quad \vec{n} = \sin \alpha \vec{u}_x + \cos \alpha \vec{u}_y.}$$



2. Le calcul du moment résultant en  $O$  s'écrit alors par définition

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}(O) &= \int_{z=H_1-H_2}^0 \int_{y=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \vec{OM} \wedge d\vec{F}_p = \int_{z=H_1-H_2}^0 \int_{y=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (y\vec{u}_y + X\vec{u}) \wedge (-\vec{n}) (P(z) - P_a) dXdY \\ &= \int_{z=H_1-H_2}^0 \int_{y=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (-y\vec{u} + X\vec{u}_y) (P(z) - P_a) dXdY = 0\vec{u} + \vec{u}_y \int_{z=H_1-H_2}^0 \int_{y=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (P(z) - P_a) dXdY \end{aligned}$$

En effet le premier terme va être nul par symétrie si le plan du dessin est un plan de symétrie du réservoir (ce qui est implicite dans l'énoncé...). Il reste donc

$$\vec{\mathcal{M}}(O) = \frac{\rho g L}{\sin^2 \alpha} (-\vec{u}_y) \int_{H_1-H_2}^0 (H_1 - z) z dz \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{\mathcal{M}}(O) = \frac{\rho g L}{3 \sin^2 \alpha} \left( \frac{H_1}{2} + H_2 \right) (H_2 - H_1)^2 \vec{u}_y.}$$

3. Soit  $C$  le centre de poussée, tel que  $\vec{OC} = \ell_c \vec{u}$ . On a par définition

$$\vec{\mathcal{M}}(O) = \vec{OC} \wedge \vec{F}_p = \frac{\rho g L}{\sin \alpha} \vec{u}_y \ell_c \frac{H_2^2 - H_1^2}{2}$$

ce qui par comparaison avec l'expression précédente conduit à

$$\boxed{\ell_c = \frac{(H_1 + 2H_2)(H_2 - H_1)}{3(H_1 + H_2) \sin \alpha}.}$$

Vérification :

Posons  $a = \frac{H_2 - H_1}{\tan \alpha}$  la dimension de la projection selon  $Ox$  du fond incliné, et faisons tendre  $\alpha$  vers 0 avec  $a$  fixé :

$$\vec{F}_p = -\frac{1}{2} \rho g L a (H_2 + H_1) (\tan \alpha \vec{u}_x + \vec{u}_z) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} -\frac{1}{2} \rho g L a (H_2 + H_1) \vec{u}_z$$

ce qui correspond bien au poids de la colonne d'huile, et

$$\ell_c = \frac{(H_1 + 2H_2)a}{3(H_1 + H_2) \cos \alpha} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \frac{a}{2}$$

ce qui correspond à un point d'application en plein milieu de la surface, correct pour une pression uniforme du coup sur la surface qui est maintenant horizontale.