MÉCANIQUE

I. Planètes extra-solaires

1. a) La force exercée par l'étoile sur la planète s'écrit $\boxed{\overrightarrow{F} = -\mathcal{G}\dfrac{mM}{EP^3}.\overrightarrow{EP} = -\mathcal{G}\dfrac{mM}{r^2}.\vec{e}_r}$, qu'on notera $F(r)\vec{e}_r$. Pour calculer l'énergie potentielle d'interaction, on peut supposer l'étoile fixe et donc seulement la force de l'étoile sur la planète.

$$\delta W = \overrightarrow{F}.\mathrm{d}\overrightarrow{EP} = F(r)\vec{e}_r.(\mathrm{d}r\vec{e}_r + r\mathrm{d}\vec{e}_r) = F(r)\mathrm{d}r$$

car $\vec{e}_r.\mathrm{d}\vec{e}_r = 0$ (car il est de norme constante). On en déduit $\delta W = -\mathrm{d}E_p(r)$ en posant $\boxed{E_p(r) = -\dfrac{\mathcal{G}mM}{r}}$, qui est bien nulle à l'infini.

b) On note $\vec{v}$ la vitesse de la planète P dans $\mathcal{R}$. Le théorème du moment cinétique appliqué à P au point E fixe dans $\mathcal{R}$ galiléen s'écrit :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}(E)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{EP} \wedge \overrightarrow{F} = r\vec{e}_r \wedge F(r)\vec{e}_r = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{\sigma}(E) = \overrightarrow{EP} \wedge m\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\text{constante}} = \vec{\sigma}_0\,.$$

Ainsi, à tout instant le vecteur position $\overrightarrow{EP}$ est orthogonal au moment cinétique constant $\vec{\sigma}_0$, donc la trajectoire du mouvement appartient au plan orthogonal à $\vec{\sigma}_0$ passant par E. **Le mouvement est donc plan**.

2. a) On utilise les coordonnées et la base polaires dans un repère centré sur l'étoile E. Pour un mouvement circulaire de rayon a, le Théorème de la Résultante Cinétique (TRC) dans $\mathcal{R}$ galiléen conduit à

$$-ma\dot{\theta}^2 = -\frac{K}{a^2} \quad \text{selon} \quad \vec{u}_r \quad \text{, avec} \quad K = \mathcal{G}Mm\,.$$

Ceci conduit à $\dot{\theta}^2 = \frac{\mathcal{G}M}{a^3}$, qui est une constante donc **le mouvement est uniforme** (ce qui découle aussi de la conservation du moment cinétique). **La vitesse angulaire est donc égale à sa valeur moyenne** :

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{\theta} & = & \frac{2\pi}{T} \\ \dot{\theta}^2 & = & \frac{\mathcal{G}M}{a^3} \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mathcal{G}M}{4\pi^2}}$$

qui est la **3ème loi de Kepler**. Ainsi le rapport $\frac{a^3}{T^2}$ pour la trajectoire d'un satellite pour un même astre central fixe est le même quelque soit le satellite.

b) En prenant la masse du Soleil pour 51-Peg on obtient $\boxed{a = \left(\dfrac{\mathcal{G}M_S T^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}} = \underline{7,4 \times 10^9\,\text{m} = 0,049\,\text{u.a.}}$

3. a) La trajectoire elliptique est un état d'état d'**énergie mécanique constante** $E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mathcal{G}Mm}{r^2}$. Donc par conservation, la distance au centre de force r diminue lorsque v augmente et vice versa.
Ainsi **la vitesse maximale** v_M **est obtenue pour** r_M **minimale, donc au périastre** (ou péricentre).
Inversement **la vitesse minimale** v_m **est obtenue pour** r_M **maximale, donc à l'apoastre** (ou apocentre).

b) Le moment cinétique de P en E est conservé, et s'écrit $\vec{\sigma}(E) = mr\vec{u}_r \wedge (\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\,\vec{u}_z$. Il est constant donc $C = r^2\dot{\theta}$ est constante. À l'apocentre et au péricentre $\dot{r} = 0$ donc $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta = \frac{C}{r}\vec{u}_\theta$ en ces positions. On en déduit $\boxed{|C| = r_m v_m = r_M v_M}$.
On rappelle que $r_m = r_{\max} = a + c$ et $r_M = r_{\min} = a - c$ ici. D'où

$$\frac{v_m}{v_M} = \frac{r_M}{r_m} = \frac{a-c}{a+c} = \frac{1-\frac{a}{c}}{1+\frac{c}{a}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{v_m}{v_M} = \frac{1-e}{1+e}}.$$

SCHEMA
ellipse, a, c, $r_{\max}$ et $r_{\min}$.

Ce rapport est bien positif car $e < 1$ pour une ellipse.

Autre méthode possible (pas celle suggérée par cet énoncé...) : introduire l'équation polaire de la trajectoire et la paramètre p, $r = \frac{p}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}$. On en déduit $r_m = r_{\max} = \frac{p}{1-e}$ et $r_M = r_{\min} = \frac{p}{1+e}$, d'où le résultat.

c) La relation précédente repose sur la conservation du moment cinétique, donc il faut maintenant chercher une relation issue de la conservation de l'énergie. Pour une trajectoire elliptique on a $E_m = -\frac{K}{2a}$, donc dans le but de réutiliser le résultat précédent :

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{K}{r_m} & = & \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{K}{2a} \\ \frac{K}{r_M} & = & \frac{1}{2}mv_M^2 + \frac{K}{2a} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{r_M}{r_m} = \frac{\frac{v_m^2}{v_M^2} + \frac{\mathcal{G}M}{av_M^2}}{1 + \frac{\mathcal{G}M}{av_M^2}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1-e}{1+e} = \frac{\frac{(1-e)^2}{(1+e)^2} + \frac{\mathcal{G}M}{av_M^2}}{1 + \frac{\mathcal{G}M}{av_M^2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\mathcal{G}M}{av_M^2}\frac{2e}{1+e} = \frac{1-e}{1+e}\left(1 - \frac{1-e}{1+e}\right) = \frac{1-e}{1+e}\frac{2e}{1+e} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{v_M = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M}{a}}.\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}}.$$

Cette vitesse devient infinie pour $e \to 1$ car alors $c \to a$ (qui est fixé et fini) et donc le péricentre est confondu avec le centre de force, d'où une énergie potentielle infinie négative.

Méthode plus rapide que celle suggérée par l'énoncé :

$$\frac{1}{2}mv_M^2 = \frac{K}{r_M} - \frac{K}{2a} \quad \textit{avec} \quad r_M = a - c = a(1-e)\ldots$$

d'où le résultat.

d) En **2.a)** on a trouvé $\dot{\theta}^2 = \frac{\mathcal{G}M}{a^3}$. Or pour un mouvement circulaire $v_0 = ||\vec{v}_0|| = a|\dot{\theta}|$, d'où $\boxed{v_0 = \sqrt{\dfrac{\mathcal{G}M}{a}}}$ et $\boxed{\dfrac{v_M}{v_0} = \sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}}}$. On retrouve bien $v_M = v_0$ pour un mouvement circulaire, pour lequel $e = 0$.
Application numérique : $\frac{v_M}{v_0} \approx \underline{2,3}$ pour 16 CygB.

4. a) Le barycentre est défini par $\boxed{m\overrightarrow{OP} + M\overrightarrow{OE} = \vec{0}} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{EO} = \dfrac{m}{m+M}\overrightarrow{EP}}$, d'où

$$\vec{V} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OE}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = -\frac{m}{M}\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OP}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = -\frac{m}{M}\vec{v} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = \frac{m}{M}v}.$$

b) La loi de Kepler trouvée précédemment pour v donnait pour un mouvement circulaire $v = \frac{2\pi a}{T} = \frac{2\pi}{T}\left(\frac{\mathcal{G}MT^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{2\pi\mathcal{G}M}{T}\right)^{\frac{1}{3}}$. D'où $\boxed{V = m\left(\dfrac{2\pi\mathcal{G}}{M^2T}\right)^{\frac{1}{3}}}$.

c) On en déduit $\boxed{m = V\left(\dfrac{M^2T}{2\pi\mathcal{G}}\right)^{\frac{1}{3}}} \approx \underline{9 \times 10^{26}\,\text{kg}}$. Il s'agit d'une **planète géante**.

5. On peut réutiliser la relation trouvée en **4.a)** d'où $m = M\frac{V_M}{v_M}$, et celle trouvée en **3.d)** : $v_M = v_0\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$ avec $v_0 = \left(\frac{2\pi\mathcal{G}M}{T}\right)^{\frac{1}{3}}$ d'après **4.b)**. Ceci conduit à $\boxed{m = V_M\left(\dfrac{M^2T}{2\pi\mathcal{G}}\right)^{\frac{1}{3}}\sqrt{\dfrac{1-e}{1+e}}} \approx \underline{7 \times 10^{25}\,\text{kg} \sim 10M_T}$.
Cette planète est donc **probablement tellurique** car de masse plus proche de celle de la Terre.