

MÉCANIQUE

CALCULATRICES AUTORISÉES

I. Planètes extra-solaires

Une exoplanète est une planète tournant autour d'une étoile autre que notre soleil, c'est-à-dire une planète n'étant pas dans notre système solaire.

La première a été détectée en 1995 par l'équipe de l'astronome Michel Mayor. Cette première planète extrasolaire orbite autour d'une étoile de la séquence principale, 51 Peg. Cependant, les 334 exoplanètes découvertes hors de notre système solaire entre 1995 et le début de 2009 n'ont pas été observées directement mais via les perturbations qu'elles provoquent sur leur étoile. Pour l'instant il est impossible d'observer visuellement la surface de ces planètes.

Une planète est dite *tellurique* si elle est analogue en masse et en composition à la Terre ; elle est dite *géante* si elle est comparable à Jupiter. Parmi les 334 planètes découvertes hors de notre système solaire entre 1995 et le début de 2009, la plupart sont gigantesques, de type jovienne, et on n'en a pas encore trouvé de semblables à la Terre. De plus, il existe d'autres étoiles qui sont entourées d'un disque de poussière qui pourrait être un système planétaire en formation.

Toutefois il y en a trois qui semblent être différentes. Leur masse est comprise entre 7 et 20 fois celle de la Terre, ce qui en fait de très petites exoplanètes. Et elles seraient les premières planètes rocheuses découvertes jusqu'à aujourd'hui. La pesanteur sur ces exoplanètes serait trois fois plus importante que sur la Terre. Les étoiles qui abritent ces trois spécimens sont relativement près de nous. L'étoile 55 Can ε se trouve à 43, 6 a.l. (années lumières), Gliese 436 β à 33, 2 a.l. et Mu Arae δ à 50 a.l. Deux de ces étoiles sont de type spectral G, c'est-à-dire semblables à notre Soleil.

On s'intéresse tout spécialement au cas de l'étoile 51 Peg (Peg pour Pegasi car dans la constellation de Pégase), vraisemblablement accompagnée d'une planète orbitant en 4 jours. Cette étoile est de type solaire. Pour les calculs on supposera sa masse égale à celle du soleil. Le système constitué par l'étoile et sa planète est considéré comme isolé, dans le référentiel d'étude \mathcal{R} supposé galiléen.

Données numériques :

- Constante de gravitation universelle : $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$;
- Masse du Soleil : $M_S = 2,0 \times 10^{30} \text{ kg}$;
- Masse de la Terre : $M_T = 6,0 \times 10^{24} \text{ kg}$;
- Masse de Jupiter : $M_J = 2,0 \times 10^{27} \text{ kg}$;
- Distance Terre-Soleil : 1 u.a. = $1,5 \times 10^{11} \text{ m}$;
- Rayon du Soleil : $R_S = 7,0 \times 10^8 \text{ m}$;
- Rayon de la Terre : $R_T = 6,4 \times 10^6 \text{ m}$;
- Rayon de Jupiter : $R_J = 7,1 \times 10^7 \text{ m}$;

L'unité astronomique (u.a.) est égale par définition au demi-grand axe de l'orbite terrestre.

1. a) Rappeler l'expression de la force d'interaction gravitationnelle entre la planète P et son étoile E , de masse respectives m et M assimilées à des points matériels. Établir l'expression de l'énergie potentielle $E_p(r)$ correspondante en prenant $E_p(\infty) = 0$. On posera $\vec{EP} = r\vec{e}_r$ où \vec{e}_r est un vecteur unitaire.
 - b) Pourquoi le mouvement de P est-il plan ? Justifier précisément, en supposant que l'étoile est fixe dans \mathcal{R} .
On admettra que le mouvement est toujours plan même si l'étoile est mobile.
2. Dans un premier temps, on néglige la masse de la planète devant celle de son étoile, ce qui permet de considérer l'étoile fixe.
 - a) Pour un mouvement circulaire de rayon a et de période T , établir l'expression du rapport $X = \frac{a^3}{T^2}$ et commenter le résultat.

- b) Donner un ordre de grandeur du rayon de la trajectoire circulaire d'une planète orbitant en 4 jours autour de l'étoile 51 Peg.
3. Toujours en considérant l'étoile fixe, on s'intéresse à une orbite elliptique, de demi-grand axe a et d'excentricité e . On rappelle que l'excentricité d'une ellipse est notamment le rapport c/a où c représente dans cette question la distance d'un des foyers au centre de symétrie de la trajectoire.
- a) Soient v_m et v_M les valeurs respectivement minimale et maximale de la vitesse de la planète sur son orbite. Pour quels points caractéristiques de cette orbite sont-elles obtenues ? Justifier quantitativement.
- b) On note r_m et r_M les distances à l'étoile correspondant respectivement à v_m et v_M . Établir une relation entre r_m , r_M , v_m et v_M .
En déduire le rapport $\frac{v_m}{v_M}$ en fonction de e uniquement.
- c) Obtenir indépendamment de ce qui précède une expression reliant v_m , v_M , a , e et les paramètres du système. Déterminer alors v_M en fonction de a , e , M et \mathcal{G} .
- d) Soit v_0 la vitesse qu'aurait la planète sur une orbite circulaire de rayon a . Déterminer $\frac{v_M}{v_0}$ en fonction de e uniquement. Calculer ce rapport pour $e = 0,67$ (cas du candidat exoplanète 16 CygB).

On tient compte maintenant du rapport des masses de la planète et de l'étoile tout en supposant $m \ll M$. On peut supposer que les résultats obtenus dans les questions précédentes sont toujours valables en première approximation, mis-à-part que l'étoile est maintenant considérée mobile.

4. On s'intéresse comme annoncé à l'exoplanète 51-PegasiB d'excentricité $e = 0,014$ (trajectoire quasi circulaire) et de période de rotation très petite (4,2 jours) comparée aux périodes de rotation des planètes du système solaire.
- a) Définir la position du barycentre O du système étoile-planète.
En supposant O fixe dans le référentiel d'étude, trouver la relation entre les vitesses V de l'étoile et v de la planète.
- b) Exprimer, pour une orbite circulaire, V en fonction de m , M , \mathcal{G} et de la période T du mouvement.
- c) D'après les observations, les plus courtes périodes mesurées sont de 4 jours, et la vitesse V de l'étoile est de 60 m.s^{-1} . Évaluer la masse m de la planète. Peut-il s'agir d'une planète de type tellurique ou de type géante ?
5. Dans le cas d'une orbite tellurique, dont la période T serait aussi de l'ordre de 4 jours, évaluer la masse m pour $e = 0,67$ et $V_M = 10 \text{ m.s}^{-1}$, où V_M est la vitesse maximale de l'étoile, qui sera aussi considérée de type solaire.