MÉCANIQUE

Soignez la présentation et la rédaction, qui doit être complète et concise. Tout résultat doit être justifié, et mis en valeur. Les résultats littéraux doivent être homogènes. Les résultats numériques doivent avoir un nombre de chiffres significatifs vraissemblable. Les schémas doivent être clairs, suffisamment grands et lisibles. Si vous n'arrivez pas à montrer un résultat, admettez-le clairement et poursuivez.

CALCULATRICES AUTORISÉES

I. Astérosismologie

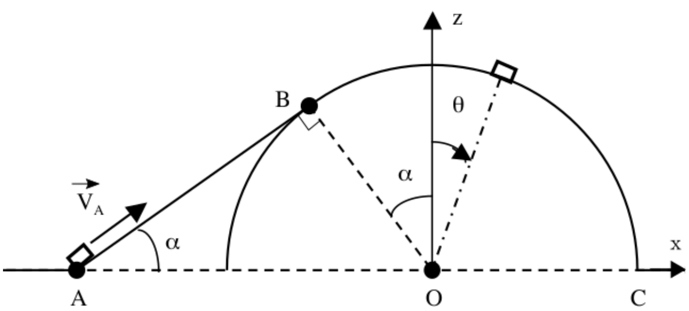
La recherche d'exoplanètes nécessite des techniques très précises d'analyse des signaux lumineux en provenance des étoiles. Son développement a parallèlement conduit à l'émergence de l'astérosismologie, qui étudie les vibrations internes des étoiles. Le son qui leur est associé ne nous parvient pas directement, mais les fréquences obtenues peuvent être utilisées pour en déduire des informations sur l'étoile. En outre des artistes ont travaillé à partir de ces données pour créer des œuvres musicales [1].

On recherche un ordre de grandeur de ces fréquences par analyse dimensionnelle. La cohésion de l'étoile est assurée à cette échelle par les forces de gravitation. On s'attend donc à devoir faire intervenir la masse M_e de l'étoile, son rayon R, et la constante de gravitation universelle $\mathcal{G}$.

1. Rappeler l'expression de la loi de gravitation universelle entre deux masses supposées ponctuelles. On fera un schéma.
2. Par analyse dimensionnelle, établir une expression possible de la fréquence de vibration f en fonction de M_e, R et $\mathcal{G}$, en introduisant un coefficient sans dimension k.
3. Que trouve-t-on pour le Soleil (on prendra $k = 1$) ? Est-ce une fréquence audible par l'oreille humaine ?
   Données : $M_\odot = 2 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$, $R_\odot = 7 \times 10^{5}\,\mathrm{km}$, $\mathcal{G} = 6,7 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$.

II. Mouvement d'un glaçon sur un tremplin

Un bloc de glace de masse $m = 5,0\,\mathrm{kg}$ et de centre d'inertie M est lancé sur un tremplin composé d'une part, d'une rampe rectiligne AB inclinée d'un angle $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontale, et d'autre part d'une portion circulaire BC, de rayon $R = 2,0\,\mathrm{m}$ et d'angle $(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{2} + \alpha$ (cf figure ci-contre). Le tremplin est conçu de sorte que le triangle AOB est rectangle en B (donc la rampe est tangente au cercle en B).



À l'instant $t = 0$, le glaçon est lancé depuis A avec la vitesse $\vec{v}_A$, puis il glisse sans frottement sur le tremplin. On admet que le mouvement a lieu dans le plan Oxz et on définit la base cartésienne associée $(\vec{u}_x, \vec{u}_z)$. On désigne par $g = 9,8\,\mathrm{m.s^{-2}}$ l'intensité du champ de pesanteur. Le référentiel d'étude est terrestre et considéré galiléen.

1. Déterminer l'expression de la vitesse $\vec{v}(t)$ à l'instant t sur la rampe, en fonction des données, dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_z)$.

1. https ://www.futura-sciences.com/sciences/dossiers/univers-chant-etoiles-nouvelle-musique-stellaire-1857

2. Montrer que le point B est atteint seulement si la norme v_A de $\vec{v}_A$ est supérieure à une valeur v_ℓ. Exprimer v_ℓ puis calculer sa valeur numérique.

Pour les questions suivantes, on suppose la condition précédente vérifiée.

3. Exprimer la date t_B à laquelle le glaçon atteint le point B.

4. Exprimer la norme v_B de la vitesse au point B.

On s'intéresse maintenant à la phase du mouvement sur l'arc BC. La position de M est repérée par l'angle $\theta = (\widehat{\vec{u}_z;\overrightarrow{OM}})$. On travaille dans la base polaire définie par $\overrightarrow{OM} = R\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ dirigé vers les θ croissants (sens positif horaire).

5. Faire un schéma des forces appliquées au glaçon, puis projeter le théorème de la résultante cinétique sur les vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$.

6. En intégrant l'équation du mouvement selon $\vec{u}_\theta$, établir une expression de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ en fonction de θ et des paramètres du problème. On pourra exprimer le résultat notamment en fonction de v_B et α.

7. En déduire l'expression de la réaction normale $\vec{N}$ du support en fonction de θ, m, g et R, v_B et α.

8. A quelle condition sur v_B, puis sur v_A, n'y aura-t-il pas de décollage avant le sommet ? Que donne la valeur numérique ?

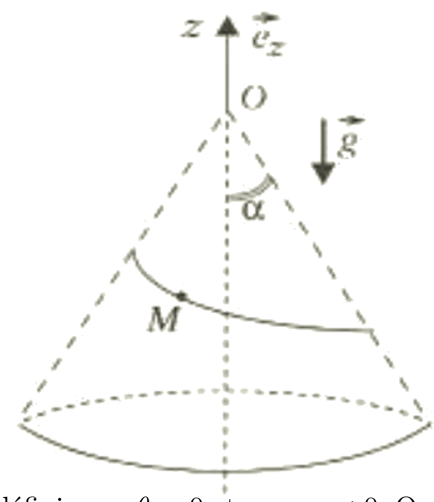
9. Déterminer finalement l'expression de la position θ_d, valeur de θ pour laquelle le glaçon quitte la piste.
Application numérique : que se passe-t-il si $v_A = 7,0\,\mathrm{m.s^{-1}}$?

III. Mouvement d'une bille sur un rail

Une bille de masse m et de centre d'inertie M roule sans glisser sur un rail. On admettra qu'on peut l'assimiler à un point matériel glissant sans frottement. Le rail est en forme de spirale descendante s'appuyant sur un cône de demi angle au sommet α (cf figure ci-contre). Son équation paramétrée en coordonnées cylindriques s'écrit

$$r = r_0\, e^{\beta\theta} \quad ,\text{et} \quad z = -\frac{r}{\tan\alpha},$$

où β est une constante positive.
On pourra considérer le référentiel d'étude galiléen.



On abandonne M sans vitesse initiale depuis la position M_0 définie par $\theta = 0$ et $z = z_0 < 0$. On souhaite déterminer les lois horaires du mouvement et de la réaction normale $\vec{N}$ exercée par le rail sur la bille.

1. En vous appuyant sur l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ de M en coordonnées et dans la base cylindriques, construire le vecteur unitaire $\vec{u}_t$ tangent à la trajectoire dans le sens du mouvement (donc descendant). On donnera son expression en fonction des paramètres α et β.

2. En remarquant que $\vec{v} = v\,\vec{u}_t$ avec $v = ||\vec{v}||$, établir une équation différentielle vérifiée par la norme de la vitesse $v(t)$. On pourra pour cela projeter le principe fondamental de la dynamique le long de $\vec{u}_t$.

3. En déduire l'expression de $v(t)$, puis les lois horaires $r(t)$, $\theta(t)$ et $z(t)$.

4. Établir l'expression de la composante verticale N_z de la réaction normale de la piste. On ne cherchera pas à déterminer les autres composantes.

* * * FIN DE L'ÉPREUVE * * *