

THERMODYNAMIQUE

I. Moteurs à combustion interne

I.1. Rendement théorique

1. Par définition $C_{vm} = \frac{1}{n} \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V$ et $C_{pm} = \frac{1}{n} \left. \frac{\partial H}{\partial T} \right|_P$.

Dans un gaz parfait la relation de Mayer s'écrit : $C_p = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V + \frac{dnRT}{dT} = C_v + nR \Rightarrow C_{pm} = C_{vm} + R$.

En injectant que $C_{pm} = \gamma C_{vm}$ on obtient $C_{vm} = \frac{R}{\gamma - 1}$ et $C_{pm} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$.

2. Le cas échéant on applique les 1ère et 2nde lois de Joule pour un gaz parfait : $\Delta U = C_v \Delta T$ et $\Delta H = C_p \Delta T$ (qui supposent que γ soit considéré constant sur le domaine de températures considéré¹).

• $A \rightarrow B$: adiabatique donc $Q_{AB} = 0$.

• $B \rightarrow C$: échauffement isochore donc $Q_{BC} = \Delta U_{BC} = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_C - T_B)$.

• $C \rightarrow D$: échauffement isobare donc $Q_{CD} = \Delta H_{CD} = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1} (T_D - T_C)$.

• $D \rightarrow E$: adiabatique donc $Q_{DE} = 0$.

• $E \rightarrow A$: échauffement isochore donc $Q_{EA} = \Delta U_{EA} = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_A - T_E)$.

3. Pour un moteur, le rendement est le rapport du travail total sur le cycle W (en valeur absolue) par le transfert thermique reçu de la source chaude :

$$\eta = - \frac{W}{Q_{BC} + Q_{CD}}$$

Sur un cycle entier, la variation des fonctions d'état est nulle donc le premier principe appliqué au système satisfait

$$0 + 0 + 0 = W + Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DE} + Q_{EA} = W + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{EA} \Leftrightarrow -W = Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{EA}$$

d'où $\eta = 1 + \frac{Q_{EA}}{Q_{BC} + Q_{CD}}$ ou encore $\eta = 1 + \frac{T_A - T_E}{T_C - T_B + \gamma (T_D - T_C)}$.

4. Pour une transformation adiabatique et mécaniquement quasi-statique (ou réversible) d'un gaz parfait :

$$PV^\gamma = \text{cte} \quad , \quad TV^{\gamma-1} = \text{cte} \quad \text{et} \quad P^{1-\gamma} T^\gamma = \text{cte}$$

Démonstration : cf cours.

5. Les loi de Laplace s'appliquent entre A et B et entre D et E : $T_B = T_A \alpha^{\gamma-1}$ et $T_E = T_D \varepsilon^{\gamma-1} \alpha^{1-\gamma}$ (en notant que $V_C = V_A$).

Entre C et D l'isobare permet d'écrire $T_D = T_C \varepsilon$.

Entre B et C l'isochore permet d'écrire $T_C = T_B \lambda$.

En associant ces relations on obtient finalement

$$T_B = T_A \alpha^{\gamma-1} \quad , \quad T_C = T_A \lambda \alpha^{\gamma-1} \quad , \quad T_D = T_A \varepsilon \lambda \alpha^{\gamma-1} \quad \text{et} \quad T_E = T_A \varepsilon^\gamma \lambda$$

Numériquement, $T_B = 7,6 \times 10^2 \text{ K}$, $T_C = 1,2 \times 10^3 \text{ K}$, $T_D = 1,8 \times 10^3 \text{ K}$, et $T_E = 8,9 \times 10^2 \text{ K}$.

1. Hypothèse souvent implicite dans les énoncés... donc à supposer en l'absence d'informations supplémentaires.

6. Ceci conduit à $\eta = 1 + \frac{(1 - \lambda \varepsilon^\gamma) \alpha^{1-\gamma}}{(\lambda - 1) + \gamma \lambda (\varepsilon - 1)} = 0,56$.

7. a) Sur un cycle on a $0 = W + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{EA}$ donc on a toujours $\eta_C = 1 + \frac{Q_{EA}}{Q_{BC} + Q_{CD}}$.

Le cycle étant supposé réversible, le second principe donne : $0 = \frac{Q_{EA}}{T_A} + \frac{Q_{BC} + Q_{CD}}{T_D}$, ce qui conduit à

$$\eta_C = 1 - \frac{T_A}{T_D} = 0,83$$

On trouve bien que $\eta_C > \eta$, ce qui prouve que le cycle est irréversible.

b) Sur le cycle complet, le second principe s'écrit $\Delta S = 0 = S_e + S_p$ donc $S_p = -S_e = -\frac{Q_{BC} + Q_{CD}}{T_D} - \frac{Q_{EA}}{T_A}$. En réunissant les résultats précédents on obtient

$$S_p = -\frac{nR}{\gamma - 1} \left(\frac{T_C - T_B + \gamma (T_D - T_C)}{T_D} + \frac{T_A - T_E}{T_A} \right)$$

$$\Rightarrow S_{pm} = -\frac{R}{\gamma - 1} \left(\gamma + 1 + \frac{1 - \gamma}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon \lambda} - \lambda \varepsilon^\gamma \right) = 25 \text{ J.K}^{-1} \text{.mol}^{-1}$$

Le cycle est bien **irréversible** comme le prouvait déjà le résultat précédent, à cause des transferts thermiques mettant en jeu des **hétérogénéités de température importantes** au contact des sources entre B et D et entre E et A .

I.2. Moteur à allumage commandé

8. On se place dans le cas où $V_D = V_C$ donc $\varepsilon = 1$, ce qui donne $\eta = 1 - \alpha^{1-\gamma}$.

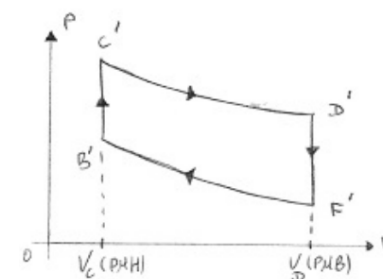
Comme $\gamma > 1$, c'est une fonction croissante de α , donc **plus α est grand, plus le rendement est grand**.

9. Le rapport de compression est limité par l'inflammation directe qui est à éviter. Donc on se limite à un volume au PMB minimal, $V_{B \min}$, ou un rapport de compression maximal $\alpha_{\max} = \frac{V_A}{V_{B \min}}$. Celui-ci correspond à la température maximale $T_{B \max} = 380^\circ\text{C}$ qui vérifie la loi de Laplace :

$$T_{B \max} = T_A \alpha_{\max}^{\gamma-1} \Leftrightarrow \alpha_{\max} = \left(\frac{T_{B \max}}{T_A} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \Rightarrow \eta_m = 1 - \frac{T_A}{T_{B \max}} = 0,51$$

I.3. Moteur de scooter

10.



On obtient le cycle ci-contre.

11. Notons $\Omega = 7000 \text{ tour.min}^{-1}$ la vitesse angulaire de rotation du vilebrequin et $\ell = 39,2 \text{ mm}$ la course du piston. La durée d'un cycle est la période de rotation du vilebrequin : $\tau = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi \times 60}{2\pi \times 7000} = 8,6 \text{ ms}$. La

vitesse moyenne du piston correspond à une distance aller-retour 2ℓ en un temps τ : $v_m = \frac{2\ell}{\tau} = 9,2 \text{ m.s}^{-1}$.

12. La vitesse quadratique moyenne u est liée à la température par le théorème d'équipartition de l'énergie, qui stipule que l'énergie cinétique de translation moyenne par particule vaut $\frac{3}{2}k_B T$ donc

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{3}{2}k_B T \Leftrightarrow u = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \underline{5,1 \times 10^2 \text{ m.s}^{-1}}$$

évaluée au point le plus froid du cycle à savoir $T_F = 300 \text{ K}$. Ainsi, au point où u est la plus faible on a encore $u \sim 50v_m$ et u de l'ordre de la vitesse du son, donc **l'hypothèse d'une évolution mécaniquement quasi-statique pour la compression et la détente est largement vérifiée.**

13. La loi de Laplace conduit à

$$P_F V_D^\gamma = P_{C'} V_B^\gamma \Leftrightarrow \alpha = \frac{V_D}{V_B} = \left(\frac{P_{C'}}{P_F}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \underline{3,8}$$

14. Le travail produit par le moteur au cours d'un cycle est (en valeur absolue) :

$$W = \mathcal{P}\tau \quad \text{or} \quad Q_{B'C'} = \frac{W}{\eta} \quad \text{d'où} \quad Q_{B'C'} = \frac{\mathcal{P}\tau}{\eta} = \underline{94 \text{ J.cycle}^{-1}}.$$

15. On cherche le volume \mathcal{V} de carburant consommé. Soit d la distance à parcourir à la vitesse maximale V_m . La durée du parcours est $\frac{d}{V_m}$, ce qui consomme, d'après le raisonnement précédent, une énergie totale

$$q_{\text{vol}}\mathcal{V} = \frac{\mathcal{P}}{\eta} \frac{d}{V_m} \Leftrightarrow \mathcal{V} = \frac{\mathcal{P}d}{q_{\text{vol}}\eta V_m} = \underline{2,9 \text{ L}} \quad \text{pour } 100 \text{ km}.$$

16. La boucle ($IEE'F'GI$) tourne dans le sens anti-horaire donc correspond à un travail reçu positif. Donc le **travail sur un cycle complet est inférieur** à celui précédemment considéré, **le rendement sera donc aussi moindre**, et donc la **consommation sera supérieure** pour une distance donnée.

17. Le travail correspondant au cycle thermodynamique est réalisé en un seul tour de vilebrequin, alors qu'il faut deux tours pour le moteur à 4 temps. **Si les aires de cycle (valeur du travail W pour un cycle) et les vitesses de rotation sont comparables, alors le moteur à 2 temps est donc deux fois plus puissant.**

Toutefois le travail n'est pas aussi grand en réalité car le fluide agent thermique **mélange un peu de gaz brûlés au gaz neuf**, ce qui n'est pas optimal. De plus il **rejette un peu de combustible non brûlé**, ce qui augmente la consommation par rapport à la quantité de chaleur réellement utilisée.

II. Propulsion d'un avion de chasse (d'après Banque PT 2014)

II.1. Éjection d'un gaz dans une tuyère

1. Le mélange de carburant et de comburant est assimilable à de l'air, donc essentiellement à un **gaz parfait diatomique**. Pour des températures inférieures à quelques milliers de degrés, on peut considérer le **degré de liberté de vibration (de la liaison covalente) est gelé**. Donc le théorème d'équipartition prend en compte 3 termes quadratique d'énergie cinétique de translation et 2 de rotation (axes orthogonaux à l'axe de la liaison), ce qui conduit à une énergie interne (définie à une constante près)

$$U = \frac{5}{2}nRT \Rightarrow C_{vm} = \frac{5}{2}R \Rightarrow C_{pm} = C_{vm} + R = \frac{7}{2}R \Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{7}{5}} = \underline{1,4}.$$

En notant $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$ la masse molaire moyenne de l'air (80% de N_2 et 20% de O_2), on en déduit

$$\text{aussi } c_p = \frac{7R}{2M} = \frac{\gamma R}{(\gamma - 1)M} = \underline{1,003 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}}.$$

2. Dans le référentiel de la tuyère, supposé galiléen, le Premier Principe Industriel (PPI) exprime **en grandeurs massiques la variation spatiale entre deux points quelconques de la tuyère, si l'écoulement est supposé en régime stationnaire** :

$$\Delta e_c + \Delta e_p + \Delta h = w_u + q$$

où e_c , e_p et h représentent respectivement les énergies cinétique et potentielle macroscopiques et l'enthalpie (massiques), et w_u et q représentent respectivement le travail utile et le transfert thermique massiques entre les 2 points d'étude.

D'après les hypothèses de travail, on considère $\Delta e_p = 0$ (écoulement de gaz, qui plus est horizontal sur la figure...), $w_u = 0$ car il **n'y a pas de paroi mobile en contact avec le fluide**, et $q = 0$ car **les parois sont calorifugées**. Par ailleurs pour un gaz parfait la **seconde loi de Joule** implique $\Delta h = c_p \Delta T$. Finalement, entre l'entrée et la sortie on obtient

$$\frac{1}{2}(c_s^2 - c_e^2) + c_p(T_s - T_e) = 0 \Leftrightarrow \boxed{c_s \approx \sqrt{2c_p(T_e - T_s)}} \quad \text{car } c_e \ll c_s.$$

Remarque : on constate que le gaz en sortie est nécessairement plus froid qu'en entrée, ce qui serait compatible avec une détente adiabatique.

3. a) On suppose l'écoulement **stationnaire**, donc la masse totale contenue entre deux sections quelconques de la tuyère (orthogonales à l'axe de révolution) est constante. Ainsi le débit massique est conservé le long de la tuyère.
- b) La section S (orthogonale à l'axe de révolution) augmente entre entrée et sortie, de même que la vitesse v du fluide. Or le débit volumique s'écrit $D_v = Sv$, donc il **n'est pas conservé le long de la tuyère, il augmente**.
- c) La masse volumique ρ du gaz fait le lien entre les deux débits : $D_m = \rho D_v$. Comme D_m est conservé et D_v augmente, alors ρ **diminue de gauche à droite, ce qui signifie que le gaz devient moins dense de gauche à droite**.

II.2. Turboréacteur sans post-combustion

4. a) L'écoulement dans le compresseur est supposé isentropique et il s'agit d'un gaz parfait. On peut donc utiliser la loi de Laplace entre l'entrée et la sortie du compresseur : $p_1^{1-\gamma} T_1^\gamma = p_2^{1-\gamma} T_2^\gamma$. On a donc $\boxed{T_2 = T_1 \tau_{12}^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}} = \underline{579 \text{ K}}$.
- b) On applique le PPI entre les positions (1) et (2) avec les hypothèses simplificatrices proposées, d'où pour une **compression adiabatique d'un gaz parfait sans changement d'énergie mécanique macroscopique** : $\boxed{\Delta h = c_p(T_2 - T_1) = w_{u12}} = \underline{279 \text{ kJ.kg}^{-1}}$.
5. Le travail reçu par le gaz lors de la compression w_{u12} est en fait fourni par le gaz subissant une détente entre (3) et (4) dans la turbine. Donc $\boxed{w_{u34} = -w_{u12}} = \underline{-279 \text{ kJ.kg}^{-1}}$.

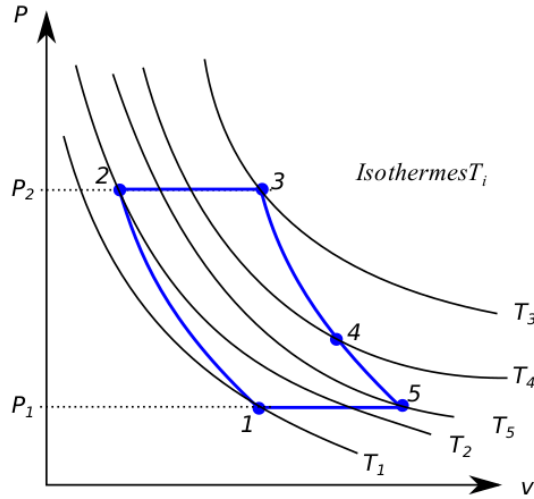
Or le PPI implique, comme pour le compresseur, que $w_{u34} = \Delta h = c_p(T_4 - T_3)$ d'où $\boxed{T_4 = T_3 + \frac{w_{u34}}{c_p}} =$

$\underline{921 \text{ K}}$. Enfin le gaz subit dans la turbine une détente adiabatique réversible vérifiant la loi de Laplace :

$$\boxed{P_4 = P_3 \left(\frac{T_3}{T_4}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}} = \underline{3,96 \text{ bar}}.$$

6. De nouveau la loi de Laplace est vérifiée dans la tuyère, avec une pression de sortie en équilibre avec la pression extérieure, donc $P_5 = P_1 = 1,00 \text{ bar}$, ce qui donne $\boxed{T_5 = T_4 \left(\frac{P_4}{P_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}-1}} = \underline{622 \text{ K}}$.

- 7.



8. a) Le PPI donne de nouveau $\frac{1}{2}(c_5^2 - c_4^2) + \Delta h = 0$ donc $c_p(T_5 - T_4) \approx -\frac{1}{2}c_s^2$. D'où $\mathcal{P}_{cin} = D_m c_p(T_4 - T_5) = 14,9 \text{ MW}$.
- b) Dans la chambre de combustion il n'y a pas de parties mobiles mais une réaction chimique donc le PPI donne $\Delta h = q_{23} = \frac{P_{th}}{D_m}$ d'où $\mathcal{P}_{th} = D_m c_p(T_3 - T_2) = 31,0 \text{ MW}$.
- c) On en déduit le rendement $\eta = \frac{\mathcal{P}_{cin}}{\mathcal{P}_{th}} = 0,48$.
- d) L'injection de carburant se fait avec un débit D_k et le pouvoir calorifique est q_k , d'où $\mathcal{P}_{th} = D_k q_k$, et donc $D_k = \frac{\mathcal{P}_{th}}{q_k} = \frac{D_m c_p(T_3 - T_2)}{q_k} = 0,62 \text{ kg.s}^{-1}$.

9. Notons T'_2, T'_3, T'_4 et T'_5 les nouvelles températures. Les étapes (2) - (3) et (3) - (4) sont adiabatiques donc dans chacun de ces cas on a $\Delta s = s_p > 0$.
Or pour un gaz parfait de masse molaire M , sur un chemin réversible entre l'état k et l'état ℓ on a d'après le second puis le premier principe :

$$\Delta s = \int_k^\ell \frac{\delta q_{rev}}{T} = \int_k^\ell \frac{du + pdv}{T} = \int_k^\ell c_v \frac{dT}{T} + \frac{R}{M} \frac{dv}{v} = c_v \ln \left(\frac{T_\ell V_\ell^{\gamma-1}}{T_k V_k^{\gamma-1}} \right) = c_v \ln \left(\frac{P_\ell^{1-\gamma} T_\ell^\gamma}{P_k^{1-\gamma} T_k^\gamma} \right)$$

Les lois de Laplace utilisées précédemment pour calculer T_2 et T_4 correspondaient à $\Delta s = 0$ donc $P^{1-\gamma} T^\gamma =$ constante, ou $P^{\frac{1}{\gamma}-1} T =$ constante. Ici on a maintenant $\Delta s > 0$ donc

$$P_\ell^{\frac{1}{\gamma}-1} T'_\ell > P_k^{\frac{1}{\gamma}-1} T'_k.$$

Comme les pressions sont inchangées par rapport aux valeurs précédentes, on trouvera donc des rapports

$$\frac{T'_2}{T_1} > \frac{T_2}{T_1} \quad \text{et} \quad \frac{T'_4}{T_3} > \frac{T_4}{T_3}.$$

Or on a toujours $T_3 = T_2 + \frac{q_{23}}{D_m c_p}$ et $T_5 = T_4 \left(\frac{P_4}{P_5} \right)^{\frac{1}{\gamma}-1}$. Donc si la consommation q_{23} n'est pas modifiée (ce que l'on suppose en l'absence de données supplémentaires), et comme les pressions sont inchangées, on obtient

$$\boxed{T'_2 > T_2} \Rightarrow \boxed{T'_3 > T_3} \Rightarrow \boxed{T'_4 > T_4} \Rightarrow \boxed{T'_5 > T_5}.$$

III. Force de pression dans un réservoir

1. Considérons un point courant $M(x, y, z)$ sur le fond incliné situé à la distance X du centre O . On note (\vec{u}, \vec{n}) la base orthonormée telle que $\vec{OM} = X\vec{u}$ et \vec{n} est orthonormal au fond incliné dirigé vers le haut.

Sur une petite surface $dS = dXdY$ au voisinage de M (avec $dX > 0$), l'huile et l'air extérieur exercent une force élémentaire totale

$$d\vec{F}_p = -(P(z) - P_a) dS \vec{n}.$$

Le champ de pression dans l'huile est donné par la loi de l'hydrostatique dans le cas d'un axe vertical ascendant :

$$P(z) = P_a - \rho g(z - H_1).$$

Le long du fond, on a la relation $X = -\frac{z}{\sin \alpha}$ car $z < 0$, et $dX = -\frac{dz}{\sin \alpha}$, ce qui permet de tout ramener à la variable z :

$$\begin{aligned} \vec{F}_p &= \int_{z=H_1-H_2}^0 \int_{y=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{1}{\sin \alpha} \rho g(z - H_1) dz dy \vec{n} \\ &= \frac{\rho g L}{\sin \alpha} \vec{n} \int_{H_1-H_2}^0 (z - H_1) dz \quad \text{d'où} \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{F}_p = -\frac{\rho g L (H_2^2 - H_1^2)}{2 \sin \alpha} \vec{n} \quad \text{avec} \quad \vec{n} = \sin \alpha \vec{u}_x + \cos \alpha \vec{u}_y.}$$

2. Le calcul du moment résultant en O s'écrit alors par définition

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}(O) &= \int_{z=H_1-H_2}^0 \int_{y=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \vec{OM} \wedge d\vec{F}_p = \int_{z=H_1-H_2}^0 \int_{y=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (y\vec{u}_y + X\vec{u}) \wedge (-\vec{n}) (P(z) - P_a) dXdY \\ &= \int_{z=H_1-H_2}^0 \int_{y=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (-y\vec{u} + X\vec{u}_y) (P(z) - P_a) dXdY = 0\vec{u} + \vec{u}_y \int_{z=H_1-H_2}^0 (P(z) - P_a) dXdY \end{aligned}$$

En effet le premier terme va être nul par symétrie si le plan du dessin est un plan de symétrie du réservoir (ce qui est implicite dans l'énoncé...). Il reste donc

$$\vec{\mathcal{M}}(O) = \frac{\rho g L}{\sin^2 \alpha} (-\vec{u}_y) \int_{H_1-H_2}^0 (H_1 - z)z dz \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{\mathcal{M}}(O) = \frac{\rho g L}{3 \sin^2 \alpha} \left(\frac{H_1}{2} + H_2 \right) (H_2 - H_1)^2 \vec{u}_y.}$$

3. Soit C le centre de poussée, tel que $\vec{OC} = \ell_c \vec{u}$. On a par définition

$$\vec{\mathcal{M}}(O) = \vec{OC} \wedge \vec{F}_p = \frac{\rho g L}{\sin \alpha} \vec{u}_y \ell_c \frac{H_2^2 - H_1^2}{2}$$

ce qui par comparaison avec l'expression précédente conduit à

$$\boxed{\ell_c = \frac{(H_1 + 2H_2)(H_2 - H_1)}{3(H_1 + H_2) \sin \alpha}}.$$

Vérification :

Posons $a = \frac{H_2 - H_1}{\tan \alpha}$ la dimension de la projection selon Ox du fond incliné, et faisons tendre α vers 0 avec a fixé :

$$\vec{F}_p = -\frac{1}{2} \rho g L a (H_2 + H_1) (\tan \alpha \vec{u}_x + \vec{u}_z) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} -\frac{1}{2} \rho g L a (H_2 + H_1) \vec{u}_z$$

ce qui correspond bien au poids de la colonne d'huile, et

$$\ell_c = \frac{(H_1 + 2H_2)a}{3(H_1 + H_2) \cos \alpha} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \frac{a}{2}$$

ce qui correspond à un point d'application en plein milieu de la surface, correct pour une pression uniforme du coup sur la surface qui est maintenant horizontale.