

MÉCANIQUE ET THERMODYNAMIQUE

CALCULATRICES AUTORISÉES

I. Thermomètres à gaz

Donnée : constante des gaz parfait, $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$, nombre d'Avogadro $\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23}$.

I.1. Définition de l'état gazeux

Les particules formant un gaz sont en permanente agitation, appelée agitation thermique. Cela exclut de pouvoir considérer l'équilibre thermodynamique comme la simple manifestation d'un équilibre à l'échelle particulaire. D'incessantes collisions se produisent entre les particules et entre ces dernières et la paroi de l'enceinte qui les confine. Pour décrire cette situation, nous modélisons les particules comme des sphères rigides de rayon r subissant des collisions élastiques. Nous notons n^* leur nombre par unité de volume. Nous notons d la distance moyenne entre les particules à l'équilibre thermodynamique, et ℓ le libre parcours moyen.

1. Par un raisonnement simplifié qu'on détaillera, établir la dépendance de ℓ avec n^* et le rayon r .
2. Après avoir proposé un ordre de grandeur réaliste de r , calculer celui de ℓ pour un gaz dans les conditions normales de pression et de température.
3. Évaluer de même la distance d dans les mêmes conditions. Commenter.
4. De façon générale, à quelle condition sur ℓ et d un fluide se rapproche-t-il du comportement du gaz parfait. Pourquoi ?

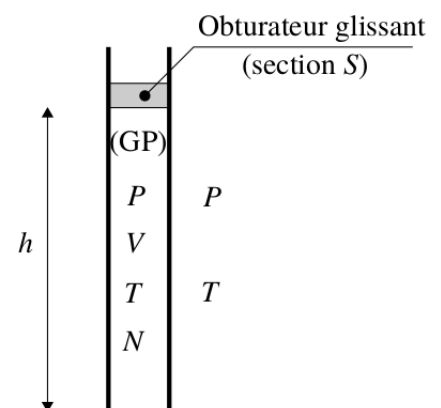
I.2. Thermomètre à variation de volume

La grandeur thermométrique est ici le volume. Le thermomètre est un tube étanche contenant n moles d'un gaz considéré comme parfait. Son embouchure est obturée par un bouchon pouvant glisser librement sous l'effet des variations de température et de pression du milieu extérieur (cf figure ci-dessous). Nous considérons que la température T et la pression P à l'intérieur du tube demeurent égales à celles du milieu extérieur (milieu dont on cherche à mesurer la température). On note h la hauteur du bouchon.

5. En pratique, la pression P du milieu est la pression atmosphérique, elle est donc susceptible de varier selon les conditions météorologiques ou le lieu. Nous définissons alors les sensibilités (intrinsèques) de ce thermomètre relativement à la température et à la pression, au voisinage de l'état $\mathcal{E}_0 = (P_0, T_0, V_0 = Sh_0)$, par les relations :

$$s_T^0 = \frac{T_0}{h_0} \left. \frac{\partial h}{\partial T} \right|_P (P_0, T_0, V_0) \quad \text{et} \quad s_P^0 = \frac{P_0}{h_0} \left. \frac{\partial h}{\partial P} \right|_T (P_0, T_0, V_0).$$

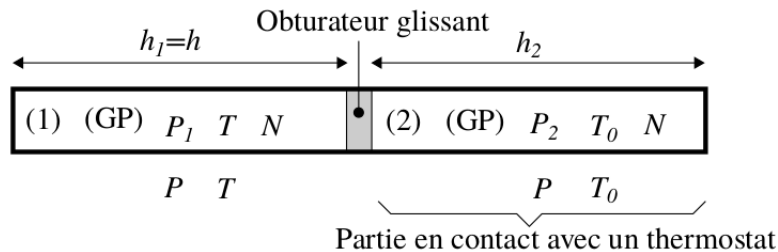
La section S du tube étant considérée comme constante, exprimer s_T^0 et s_P^0 puis tirer les conséquences de ce résultat.



Un tel thermomètre a été étalonné (c'est-à-dire gradué, en faisant correspondre à la hauteur h , la température T correspondante), au niveau de la mer, sous la pression atmosphérique P_0 (standard, $P_0 = 1,0 \text{ bar}$). La température de référence T_0 est égale à 25°C . Il est utilisé pour mesurer la température au sommet du Mont Blanc qui est donnée égale à -10°C par une centrale météorologique.

6. Établir le profil vertical de pression $P(z)$ pour un modèle d'atmosphère statique isotherme de température $T_a = 300$ K, de masse molaire moyenne M_a , et assimilé à un gaz parfait. Donner l'expression et la valeur numérique de la hauteur caractéristique H de variation de la pression. Évaluer la pression P_m en haut du Mont Blanc, d'altitude 4,8 km, dans les conditions normales (pour $P(0) = P_0 = 1,0$ bar).
7. En déduire la température T_i qu'indiquerait ce thermomètre si l'on n'effectuait pas de correction en pression.

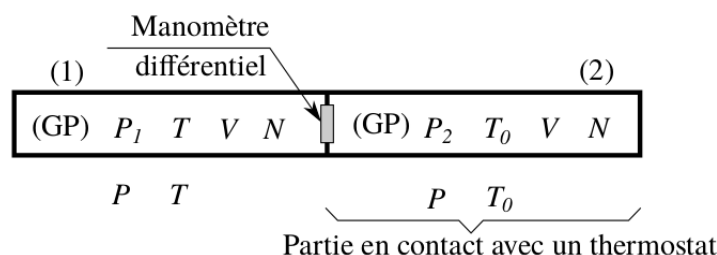
Afin de s'affranchir du biais de mesure causé par les éventuelles variations de pression, nous considérons le dispositif thermométrique représenté ci-dessous. Son volume est subdivisé en deux compartiments étanches par un obturateur glissant sans frottement. Le compartiment (1) est le tube de mesure soumis à la température extérieure T à mesurer. Le compartiment (2) est celui de compensation dont la température est maintenue égale à T_0 par un thermostat. Ces deux domaines contiennent le même nombre n de moles d'un gaz supposé parfait. Pour $T = T_0$, on a donc $h_1 = h_2 = h_0$. Lors d'une mesure, le comportement (1) se stabilise à une taille h .



8. Nous posons $X = \frac{T-T_0}{T_0}$ et $Y = \frac{h-h_0}{h_0}$. Établir la relation entre Y et X , qu'on notera sous la forme $Y = f(X)$.
9. Exprimer la sensibilité s_T^0 de ce thermomètre en fonction de X . Représenter graphiquement la dépendance de s_T^0 avec X . Commenter.
10. Un état de référence ayant été choisi, déterminer dans quel intervalle doit se situer X pour que le premier terme correctif à l'approximation linéaire de la relation $Y = f(X)$ corresponde à une erreur relative se situant dans l'intervalle $[-10, +10]\%$.
11. Indiquer un moyen simple de fixer une température de référence stabilisée T_0 (par exemple, correspondant à 0° C).

I.3. Thermomètre à variation de pression

La grandeur thermométrique est ici la pression. Le thermomètre est un tube clos indéformable subdivisé en deux compartiments étanches de même volume V et contenant le même nombre n de moles d'un gaz que nous considérons comme parfait (voir figure ci-dessous). Le compartiment (1) est à la température T du milieu extérieur que l'on cherche à mesurer. Le compartiment (2), en contact avec un thermostat qui maintient sa température à T_0 , assure une compensation en pression. Un manomètre différentiel permet de mesurer l'écart de pression $\Delta P = P_1 - P_2$.

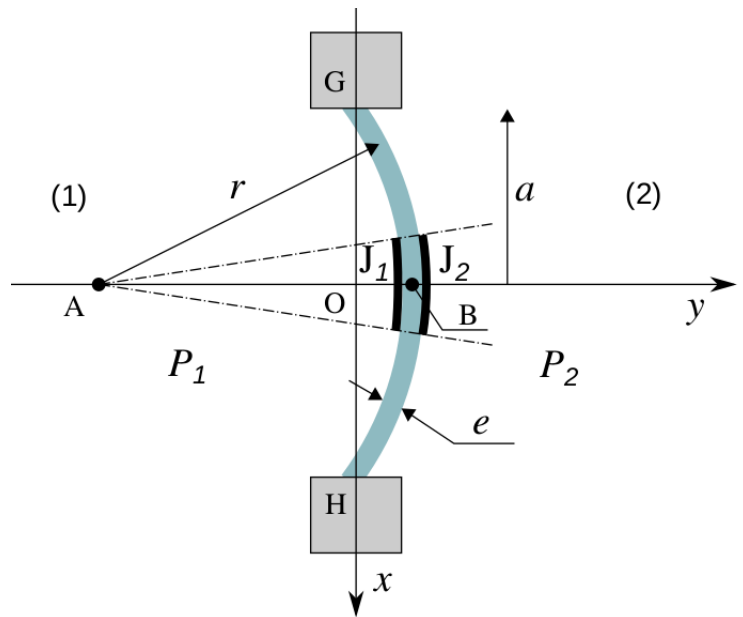


12. Relier la différence de pression ΔP à la différence de température $\Delta T = T - T_0$, n , R et V .

Principe d'un manomètre à membrane

La figure ci-contre illustre le principe d'un manomètre dont l'élément sensible est une membrane déformable élastiquement sous l'action de la différence de pression. Nous considérons que cette membrane se déforme approximativement selon une calotte sphérique de centre A et de rayon de courbure (algébrique) moyen $r = \overline{AB}$ et tel que $|r| \gg a$.

Deux jauges extensométriques J_1 et J_2 sont collées sur les faces interne (côté (1)) et externe (côté (2)) de la membrane. Chacune d'elles adopte ainsi l'état d'élongation de la surface sur laquelle elle est collée. Leur résistance électrique variant avec leur longueur, ces jauges permettent une mesure du rayon r . Dans le principe, chacune de ces jauges se présente comme une portion de fil conducteur de longueur L , matérialisée par un arc apparaissant en trait gras sur la figure ci-contre. Le point B est situé à l'intersection de l'axe O_y avec la surface médiane de la membrane.



Par l'effet de courbure, ces jauges subissent les élongations relatives respectives $\epsilon_1 = \frac{L_1 - L_0}{L_0}$ et $\epsilon_2 = \frac{L_2 - L_0}{L_0}$ (avec $|\epsilon_i| \ll 1$), où L_0 représente leur longueur au repos. Les longueurs L_1 et L_2 sont celles des arcs représentés en trait gras sur la figure ci-dessus. La variation relative de la résistance électrique de ces jauges est proportionnelle à leur élongation relative, ce que nous écrivons :

$$\frac{R_i - R_0}{R_0} = C\epsilon_i \quad \text{pour } i = 1, 2 \quad (\text{constante de jauge } C > 0).$$

13. Proposer un argument simple justifiant l'existence d'un lien entre extension et résistance, traduit par l'équation ci-dessus.

14. En admettant que la déformation élastique de la membrane conserve les proportions, établir la relation entre L_i , L , e et r .

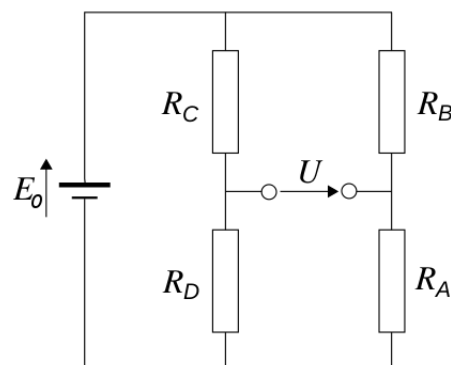
En déduire l'expression de ϵ_i puis de R_i en fonction de r et des paramètres nécessaires.

Afin de mesurer la différence de pression, ces jauges sont placées dans le pont de Wheatstone représenté ci-contre. Ce pont est alimenté sous la différence de potentiel constante E_0 . La grandeur de mesure, ou de sortie, est la différence de potentiel U . Le pont ne débite aucun courant de sortie. On rappelle que dans ces conditions on obtient

$$U = \left(\frac{R_C}{R_C + R_D} - \frac{R_B}{R_B + R_A} \right) E_0.$$

Concernant la déformation, nous montrerons ci-après que le rayon de courbure r de la membrane est lié à la différence de pression selon la relation :

$$r = \frac{K}{\Delta P} \quad \text{avec } K = \text{constante} > 0.$$



15. Montrer que ΔP est proportionnel à $\frac{\Delta R}{R_0}$ et expliciter le facteur de proportionnalité.

16. Sur la base d'une argumentation, proposer une disposition des jauges dans le pont ci-dessus, ainsi qu'un choix des autres résistances tels que la grandeur U soit approximativement proportionnelle à ΔP (c'est-à-dire qu'après linéarisation de U en fonction de ΔP , le terme d'ordre zéro en ΔP soit nul).

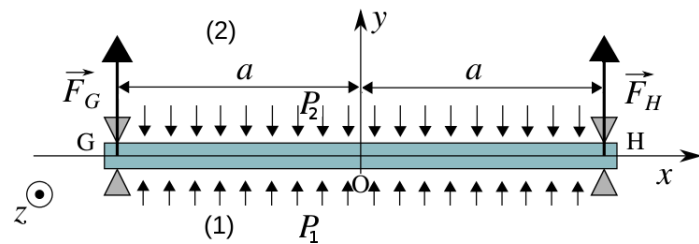
17. En déduire l'expression de U en fonction de l'écart de température $\Delta T = T - T_0$.
Est-il plus approprié de choisir une constante K plutôt faible ou plutôt élevée ? Pourquoi ?

Lien pression-déformation - Calcul de K

Nous souhaitons maintenant relier la constante K introduite a priori dans la relation ci-dessus aux paramètres géométriques de la membrane ainsi qu'à son module d'élasticité (ou *module d'Young*) E (d'unité $N.m^{-2}$), grandeur intensive propre au matériau qui la constitue. Pour cela, nous allons mettre en relation le rayon de courbure r de la membrane au moment des forces qui provoque cette courbure. Afin de simplifier les calculs, la membrane est supposée ici être un carré de côté égal à $2a$, en appui sur deux de ses côtés opposés, représentés par les points G et H (les deux autres côtés restant alors libres).

Le paramétrage géométrique et mécanique de cette modélisation est précisé dans la figure ci-contre (où le manomètre a subi une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ par rapport sa précédente représentation).

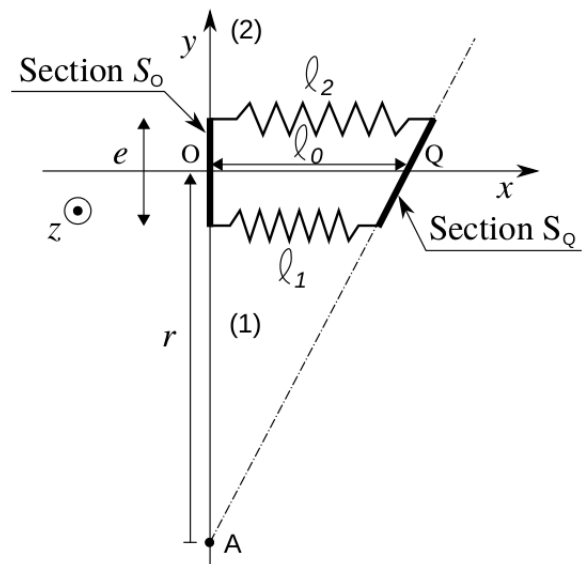
Les déformations étant faibles ($|r| \gg a$), tous les calculs de statique s'effectuent en considérant la membrane dans sa configuration plane, comme elle est représentée ci-contre.



Cette membrane est soumise à la différence de pression $\Delta P = P_1 - P_2$ ainsi qu'à la réaction verticale des appuis $\vec{F}_G = F_G \vec{u}_y$ et $\vec{F}_H = F_H \vec{u}_y$, avec $F_G = F_H$ et que nous noterons F (grandeur algébrique).

18. Exprimer le moment résultant \mathcal{M}_O (compté algébriquement selon \vec{u}_z), par rapport au point O , de l'ensemble des forces qui s'appliquent sur la moitié droite ($x \in [0, a]$) de la membrane.
19. Quelle relation y a-t-il entre F et ΔP ? En déduire une expression de \mathcal{M}_O proportionnelle à ΔP .

Il s'agit, ici, de modéliser le comportement élastique de la membrane traduisant sa faculté de résister à sa courbure. Nous considérons qu'une portion élémentaire de membrane est équivalente à deux ressorts identiques, de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 , disposés en parallèle et séparés l'un de l'autre d'une distance égale à l'épaisseur e de la membrane (de part et d'autre de sa surface médiane). La figure ci-contre représente une telle portion de membrane de longueur ℓ_0 ($\ell_0 \ll a$), comprise entre deux sections S_O et S_Q au voisinage du centre de la membrane. Étant donné que $\ell_0 \ll a \ll |r|$, l'effet de la courbure a été traduit simplement par la rotation de l'une des sections par rapport à l'autre. Les arcs, dont l'arc (OQ) , apparaissent ainsi comme des segments. La longueur du ressort inférieur passe alors de ℓ_0 à ℓ_1 , celle du ressort supérieur de ℓ_0 à ℓ_2 .

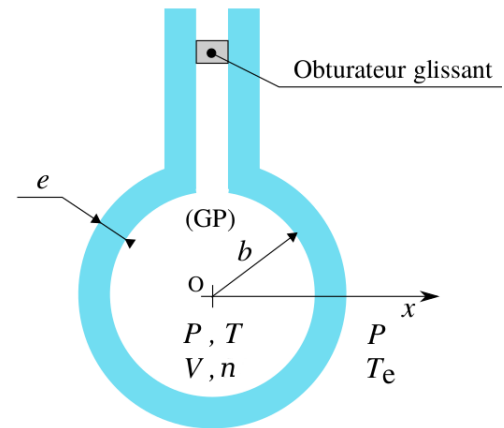


20. En réponse à la déformation, les forces élastiques ainsi modélisées exercent un couple sur la partie à droite de S_Q . Exprimer le moment résultant $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \vec{u}_z$ de ce couple en fonction de k , ℓ_0 , e et r .
21. On admet que localement le lien entre E et k s'écrit $k = E \frac{\mathcal{A}}{2\ell_0}$, avec \mathcal{A} l'aire de la section S_O . Ré-exprimer \mathcal{M} en fonction de E , a , e et r .
22. Sachant que c'est le moment \mathcal{M}_O calculé précédemment qui est responsable de la déformation élastique de la membrane, établir l'expression de la constante K en exprimant une condition d'équilibre. Analyser sa dépendance avec les différents paramètres.

1.4. Temps de réponse d'un thermomètre

Nous souhaitons caractériser la réponse temporelle d'un thermomètre soumis à des variations de température T_e du milieu extérieur. D'une manière très générale, un thermomètre comporte un domaine "sensible" où s'effectue la conversion de la température en une grandeur directement mesurable. Ce domaine interagit avec le milieu extérieur par l'intermédiaire d'une enveloppe (ou enceinte) à travers laquelle les échanges thermiques s'effectuent.

Ce thermomètre est constitué d'une enceinte sphérique en verre (ballon), de rayon b et d'épaisseur e , contenant n mole(s) de gaz. Ce gaz est à la température T et à la pression P fixée par la pression atmosphérique, supposée invariable sur la durée de l'expérience. Le ballon est surmonté d'un tube fermé par un obturateur glissant permettant la mesure de la variation de volume V du gaz (voir figure ci-contre). En dépit de la présence de ce tube, nous considérerons ce thermomètre comme un objet de géométrie sphérique. Nous supposerons que les conditions sont telles que la température T du gaz dans le ballon peut être considérée uniforme.



En régime dynamique, nous modélisons simplement ce thermomètre par un corps de capacité thermique à pression constante effective C_p et de température $T(t)$, en contact avec le milieu extérieur de température $T_e(t)$. Le transfert thermique avec l'extérieur est supposé modélisable par l'intermédiaire d'une *résistance thermique* R_{th} , telle que le thermomètre reçoit de l'extérieur un flux thermique entrant (de la dimension d'une puissance, en Watt) :

$$\Phi = \frac{T_e - T}{R_{th}}.$$

23. En appliquant le premier principe de la thermodynamique, établir l'équation différentielle vérifiée par la température $T(t)$, en réponse aux variations de la température extérieure $T_e(t)$. On introduira une constante de temps caractéristique τ_{mod} dans cette équation.

24. Calculer τ_{mod} avec les données suivantes :

- Résistance thermique de l'enceinte : $R_{th} = 0,5 \text{ K.W}^{-1}$;
- Capacité calorifique (à pression constante) des n mole(s) de gaz : $C_{p\text{gaz}} = 0,03 \text{ J.K}^{-1}$;
- Capacité calorifique de l'enceinte (en verre) : $C_{en} = 15 \text{ J.K}^{-1}$.

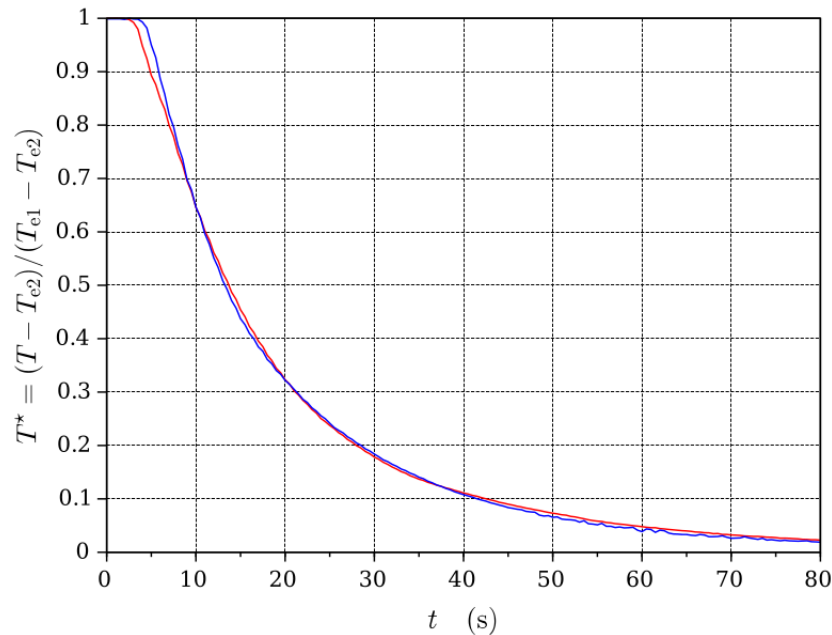
25. Le thermomètre est initialement à l'équilibre thermique avec le milieu extérieur à la température $T_{e1} = \text{constante}$. À l'instant $t = t_0$, le milieu extérieur transite brutalement à la température $T_{e2} = \text{constante}$. Établir l'expression de la réponse $T(t)$ du thermomètre.

26. Donner l'allure graphique de l'évolution $T = T(t)$, en supposant $T_{e2} < T_{e1}$.

La figure ci-dessous présente les résultats de deux expériences. Dans chacune, le thermomètre est initialement à l'équilibre thermique dans un bain thermostaté, puis il est ensuite plongé brutalement dans un béccher contenant un mélange eau-glace fondante (agité). Pour la première, le bain thermostaté est à 30°C . Pour la seconde, il est à 90°C . En ordonnée, est portée la grandeur $T^*(t) = \frac{T(t) - T_{e2}}{T_{e1} - T_{e2}}$.

27. Préciser l'intérêt du choix de la grandeur T^* pour présenter ces résultats. Que suggère la quasi-totale superposition des deux évolutions ?

28. En considérant que les évolutions présentées dans la figure ci-dessous caractérisent un système linéaire du premier ordre, estimer sa constante de temps τ_{exp} . On précisera la méthode appliquée, et on commentera le résultat.



II. Modélisation statique du Soleil

Nous cherchons à estimer par la modélisation les conditions de température, pression et densité régnant au centre du Soleil, région encore inaccessible à tout moyen d'observation. Le modèle est à symétrie sphérique : on note $p(r)$ la pression, $\rho(r)$ la masse volumique et $\vec{g}(r) = g(r)\vec{u}_r$ le champ gravitationnel à une distance r du centre de l'étoile.

Données :

- Constante des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$;
- Constante de gravitation : $\mathcal{G} = 6,7 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1}.\text{m}^3.\text{s}^{-2}$;
- Masse molaire du proton : $M_p = 1,0 \text{ g.mol}^{-1}$;
- Masse du Soleil : $M_\odot = 2,0 \times 10^{30} \text{ kg}$;
- Rayon du Soleil : $R_\odot = 7,0 \times 10^8 \text{ m}$;
- Température de surface du Soleil : $T_s = 5,7 \times 10^3 \text{ K}$.

1. On se place à l'intérieur du Soleil. La masse de gaz contenue à l'intérieur d'une sphère de rayon r est notée $M(r)$. Démontrer que

$$M(r) = \int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr'. \quad (1)$$

Pour la suite on pourra noter que cette relation implique que $\frac{dM}{dr}(r) = \rho(r)4\pi r^2$.

2. On se place dans le référentiel héliocentrique, supposé galiléen. À partir de la forme tri-dimensionnelle de la loi de la statique des fluides, établir la relation existant entre $p(r)$, $\rho(r)$ et $g(r)$.

Dans la suite, on admet¹ que le champ gravitationnel vérifie

$$g(r) = -\frac{\mathcal{G}M(r)}{r^2}, \quad (2)$$

ce qui s'interprète par le fait qu'à l'intérieur de cette boule de fluide, seules les masses situées entre le centre et la distance r contribuent au champ perçu en r .

D'autre part, on suppose que le gaz vérifie une équation d'état polytropicque, s'écrivant sous la forme

$$p = K\rho^{1+\frac{1}{n}} \quad (3)$$

1. cf programme de SPE.

où K est une constante à déterminer, et n est l'indice polytropique du gaz (plasma) constituant le Soleil. Pour les applications numériques, on prendra $n \approx 3$.

3. En utilisant les éléments précédents, montrer que la masse volumique $\rho(r)$ vérifie l'équation différentielle suivante

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \left(\rho(r)^{\frac{1}{n}} \right) \right) + A \rho(r) = 0, \quad (4)$$

où A est une constante dont on donnera l'expression.

4. Pour résoudre cette équation différentielle qui est d'ordre 2, il faut appliquer deux conditions en $r = 0$ sur $\rho(r)$ et sa dérivée. On note donc $\rho(0) = \rho_c$ la masse volumique au centre, qui est en fait une inconnue du problème. Montrer par ailleurs, en utilisant l'équation trouvée en 2. et les équations (1) et (2), que $\frac{d\rho}{dr}(0) = 0$. En déduire la valeur de $\frac{d\rho}{dr}(0)$.

On souhaite résoudre (numériquement) l'équation (4). Pour cela il faudrait donc connaître les valeurs de ρ_c et K , qui sont précisément des inconnues du problème que l'on cherche à déterminer. Une solution astucieuse consiste à ré-écrire l'Eq. (4) sous forme adimensionnée², la résoudre avec des conditions en $r = 0$ maintenant connues (cf ci-dessous), et d'imposer finalement deux contraintes sur R_\odot et M_\odot : la solution trouvée doit vérifier le rayon R_\odot et la masse M_\odot solaires réellement observés. On pose donc

$$r = r_0 \xi \quad \text{et} \quad \rho = \rho_c \Psi^n \quad (5)$$

où r_0 est une échelle spatiale caractéristique du problème, et ρ_c la masse volumique au centre. Ceci conduit à l'équation dite de Lane-Emden,

$$\frac{1}{\xi^2} \cdot \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\Psi}{d\xi} \right) + \Psi^n = 0, \quad (6)$$

à condition de poser

$$r_0 = \sqrt{\frac{K(n+1)}{\mathcal{G}4\pi\rho_c^{1-\frac{1}{n}}}}. \quad (7)$$

On impose alors les conditions au centre $\Psi(0) = 1$ et $\frac{d\Psi}{d\xi}(0) = 0$ pour la résolution.

5. Après résolution, on trouve une première annulation de Ψ en $\xi_s = 8,7$. En déduire une première équation vérifiée par R_\odot , ξ_s , et r_0 .
6. En réutilisant l'équation trouvée en 2. et les équations (2) et (3), établir une seconde relation entre M_\odot , $\Psi'_s = \frac{d\Psi}{d\xi}(\xi_s)$ et ξ_s (et d'autres paramètres utiles).
7. Résoudre le système ainsi trouvé avec les valeurs obtenues par intégration numérique, à savoir

$$\xi_s = 8,7 \quad \text{et} \quad \Psi'_s = -0,026,$$

et donner les valeurs numériques de ρ_c et K (on ne cherchera pas à exprimer l'unité SI de K).

En déduire la pression p_c au centre du Soleil en bar.

Pour évaluer la température centrale, on suppose maintenant que le plasma solaire est un gaz parfait, constitué de protons, de noyaux d'hélium 4 (4 nucléons) et d'électrons (on néglige la présence des autres éléments). On note x_e la fraction en nombre d'électrons, x_p la fraction en nombre de protons, et x_{He} la fraction en nombre de noyaux d'Hélium 4, qui vérifient par définition

$$x_e + x_p + x_{\text{He}} = 1.$$

On suppose connue la fraction massique en hélium, qui est de $Y = 28\%$.

2. c'est-à-dire avec uniquement des grandeurs sans dimension.

8. Établir deux relations entre x_e , x_p , et x_{He} . On utilisera d'une part la neutralité électrique du Soleil, et d'autre part le fait que Y est connue.
En déduire que la masse molaire du mélange est donnée par

$$\mathcal{M} = \frac{4}{8 - 5Y} M_p$$

en négligeant la masse des électrons.

9. En déduire la température centrale du Soleil T_c selon ce modèle.

* * * FIN DE L'ÉPREUVE * * *