

MÉCANIQUE

I. Techniques de gravimétrie

(d'après Centrale MP 2018)

I.1. Méthodes de mesure du champ de pesanteur à l'aide de pendules

Le pendule de Richter

1. La période des petites oscillations du pendule, $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$, permet de mesurer g connaissant ℓ en mesurant T .

2. Un pendule qui retarde de a une période d'oscillation plus grande (il marque moins de périodes dans la même durée). Le pendule de Richter a donc une période à Cayenne T_C plus grande que celle T_P à Paris dans un rapport $\frac{T_C}{T_P} = 1 + \frac{2 \min 28 \text{ s}}{1 \text{ j}} = 1 + 1,7 \cdot 10^{-3}$. En supposant que la longueur du pendule est

$$\text{inchangée, on a donc } g_C = g_P \left(\frac{T_P}{T_C} \right)^2 = 9,78 \text{ m.s}^{-2}.$$

Autre méthode : Comme il s'agit de faibles variations, la différenciation logarithmique conduit à une relation approchée entre les variations relatives :

$$\frac{\Delta T}{T} \approx -\frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g} \Rightarrow g_C = g_P + \Delta g = g_P \left(1 - 2 \frac{\Delta T}{T_P} \right) = 9,81 \times \left(1 - 2 \times \frac{2 \min 28 \text{ s}}{1 \text{ j}} \right) = 9,78 \text{ m.s}^{-2}.$$

3. L'intensité du champ gravitationnel est $G_T(z) = \frac{GM_T}{(R_T + z)^2}$.

On utilise la différenciation logarithmique pour relier les variation relatives : $\frac{\Delta G_T}{G_T} \approx -2 \frac{\Delta z}{R_T + z}$. Entre Paris et Cayenne, l'écart d'altitude peut être au maximum de $\Delta z = 131 \text{ m}$, ce qui conduit au maximum

à $\frac{\Delta G_T}{G_T} \approx -2 \frac{\Delta z}{R_T} = -4,1 \times 10^{-5}$ alors que l'écart relative observé est $\frac{\Delta g}{g} \approx 3,4 \times 10^{-3}$. Il s'agit donc d'une **autre cause que l'altitude**.

En réalité le champ de pesanteur comprend aussi une contribution due à la **rotation propre de la Terre**, qui est perçue comme une pseudo-force dite force centrifuge¹, et qui est proportionnelle à la distance à l'axe de rotation de la planète, d'autant plus grande et parallèle au champ de gravitation que la latitude est proche de zéro. Le champ de pesanteur est donc plus faible à Cayenne car **la force centrifuge le diminue significativement**.

4. Comme en 2., de la relation $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ on tire par différenciation logarithmique

$$\frac{\Delta T}{T} \approx \frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g} \approx 0,5 \times 10^{-9}$$

(on supprime le signe $-$ pour les incertitudes). Cela nécessite donc **une très grande précision**² de $0,5 \text{ ns}$ par seconde.

1. cf programme de SPE. Il s'agit de la masse multipliée par l'opposé de l'accélération centripète dans un mouvement circulaire de rayon R , $mR\omega^2$, dirigée perpendiculairement à l'axe de rotation.

2. Pour information, les horloges atomiques actuelles embarquées dans les satellites GPS (qui distribuent le temps pour les téléphones mobiles notamment) définissent le temps avec une incertitude de 10 ns par seconde. La définition de la seconde par le BIPM (horloge atomique à Cesium) est connue à $5 \times 10^{-15} \text{ s}$ par seconde. Le record actuel (2018) avec une horloge à Strontium est de $2,5 \times 10^{-19} \text{ s}$ par seconde!!

Le pendule vertical

5. L'élongation $\ell - \ell_0$ d'un ressort usuel est de l'ordre du centimètre. Elle est directement proportionnelle au poids de l'objet fixé à la base de ce ressort, via une relation du type $k(\ell - \ell_0) = mg$. Donc la variation relative de l'élongation est $\frac{\Delta(\ell - \ell_0)}{\ell - \ell_0} = \frac{\Delta g}{g} \approx 10^{-8}$, d'où une variation de l'élongation

$$\Delta(\ell - \ell_0) = (\ell - \ell_0) \cdot \frac{\Delta g}{g} \sim 0,1 \text{ nm}!$$

6. La longueur ℓ remplace l'allongement $\ell - \ell_0$ précédent. Pour une même raideur le ressort sera donc beaucoup plus court. On peut donc travailler avec une raideur plus faible pour augmenter l'allongement ℓ , et donc augmenter la précision $\Delta \ell$ requise pour une incertitude relative $\frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{\Delta g}{g}$ à atteindre.

I.2. Gravimètre à fléau de LaCoste et Romberg

7. L'énergie potentielle de pesanteur est $E_{p\text{pes}} = mgh$ où l'altitude h de la masse m est mesurée par rapport au point O , donc $h = -a \sin \theta$. L'énergie potentielle élastique est $E_{p\text{el}} = \frac{1}{2}k(s - s_0)^2$ donc

$$E_p = -mga \sin \theta + \frac{1}{2}k(s - s_0)^2.$$

8. Les coordonnées des extrémités du ressort sont $A = (0, y)$ et $B = (b \cos \theta, -b \sin \theta)$ donc

$$s^2 = \overrightarrow{AB}^2 = (b \cos \theta - 0)^2 + (-b \sin \theta - y)^2 \Leftrightarrow s = \sqrt{b^2 + y^2 + 2yb \sin \theta}.$$

Remarque : ce résultat peut aussi s'obtenir par le « Théorème d'Al Kashi », c'est-à-dire : $\overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB})^2 = y^2 + b^2 + 2\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = y^2 + b^2 + 2yb \cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = y^2 + b^2 + 2yb \sin \theta$

9. Le Théorème de la Puissance Cinétique (TPC) appliqué au système {tige + ressort + masse m } s'écrit, dans le référentiel supposé galiléen :

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{\text{pes}} + \mathcal{P}_{\text{el}} + \mathcal{P}_{\text{pivot}} = -\frac{dE_{p\text{pes}}}{dt} - \frac{dE_{p\text{el}}}{dt} + \mathcal{P}_{\text{pivot}} \Leftrightarrow \frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_{\text{pivot}},$$

avec $E_m = E_c + E_p$ l'énergie mécanique, car à l'intérieur les éléments sont **indéformables**, à part le ressort ce qui est déjà pris en compte. Le système est conservatif si **la puissance des forces intérieures et/ou extérieures liées aux liaisons pivot (parties déformables ou en contact avec l'extérieur) est nulle**. Les actions (extérieures) de contact exercées par l'axe de rotation Oz fixe conduisent à une puissance $\mathcal{P}_{\text{pivot}Oz} = \mathcal{M}_{\text{pivot}}^{Oz} \cdot \dot{\theta}$ nulle car **la liaison pivot est supposée parfaite**. On peut supposer de même pour les liaisons pivot aux extrémités du ressort. Finalement $\mathcal{P}_{\text{pivot}} = 0$ donc le système est conservatif.

On peut aussi ré-écrire le TPC ainsi : $\frac{dE_c}{dt} = -\frac{dE_p}{dt} = -\frac{dE_p}{d\theta} \cdot \dot{\theta}$, ce qui revient à considérer l'action d'un moment résultant $\Gamma = -\frac{dE_p}{d\theta}$ dirigé selon \vec{u}_z sur un solide en rotation autour de l'axe fixe Oz et de vecteur rotation $\dot{\theta} \vec{u}_z$.

10. D'après la relation précédente, le système est à l'équilibre ($E_c = 0 = \text{constante}$) si et seulement si $\Gamma = -\frac{dE_p}{d\theta} = 0$, c'est-à-dire sur les extrema d'énergie potentielle. Le calcul avec s_0 conduit à

$$\Gamma = -\frac{dE_p}{d\theta} = mga \cos \theta - kyb \cos \theta = (mga - kyb) \cos \theta.$$

Les positions d'équilibre θ_0 correspondent donc à $\theta_0 = \pm \frac{\pi}{2}$ si $mga - kyb \neq 0$, sinon toutes les positions sont d'équilibre (équilibre *indifférent*).

Une position d'équilibre est stable si c'est un minimum d'énergie potentielle³. Or

$$\frac{d^2 E_p}{d\theta^2}(\theta_0) = (mga - kyb) \sin \theta_0 = \pm (mga - kyb) \quad \text{pour } \theta_0 = \pm \frac{\pi}{2}.$$

3. En effet la démonstration du cours pourrait être adaptée ici où l'équation du mouvement en θ s'écrit : $J\ddot{\theta} = -\frac{dE_p}{d\theta}(\theta)$.

On en déduit que $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ sont respectivement stable et instable si $mga - kyb > 0$, et c'est le contraire si $mga - kyb < 0$. Cela dépend donc du réglage de y .

11. Les positions d'équilibre ne dépendent pas de g mise-à-part si on se place dans le cas indifférent $mga - kyb = 0$, ce qui permettrait de mesurer g en ajustant la valeur de y pour obtenir l'équilibre indifférent (peu pratique, peu précis...).

12. On a maintenant pour points d'attache les coordonnées $(y \sin \phi, y \cos \phi)$ et $(b \cos \theta, -b \sin \theta)$ donc

$$s^2 = b^2 + y^2 + 2yb (\cos \phi \sin \theta - \cos \theta \sin \phi) = b^2 + y^2 + 2yb \sin(\theta - \phi) \quad \text{d'où}$$

$$E'_p = -mga \sin \theta + \frac{1}{2}k [b^2 + y^2 + 2yb \sin(\theta - \phi)].$$

Tout se passe comme si on mesurait, pour la partie élastique, l'angle θ décalé de ϕ .

13. On a maintenant

$$\Gamma' = -\frac{\partial E'_p}{\partial \theta} = mga \cos \theta - kyb \cos(\theta - \phi) = (mga - kyb \cos \phi) \cos \theta - kyb \sin \phi \sin \theta.$$

Une position d'équilibre θ_0 vérifie

$$\Gamma' = 0 \Leftrightarrow \tan \theta_0 = \frac{mga - kyb \cos \phi}{kyb \sin \phi} \Rightarrow \theta_0 = \arctan \left(\frac{mga - kyb \cos \phi}{kyb \sin \phi} \right) \quad \text{car } \theta_0 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

Il existe donc une unique position d'équilibre. Pour connaître sa stabilité, on réutilise les expressions précédentes et on calcule

$$\frac{d^2 E'_p}{d\theta^2}(\theta_0) = (mga - kyb \cos \phi) \sin \theta_0 + kyb \sin \phi \cos \theta_0 = kyb \sin \phi (\tan \theta_0 \sin \theta_0 + \cos \theta_0) = \frac{kyb \sin \phi}{\cos \theta_0} > 0.$$

Cette valeur étant toujours strictement positive, la position θ_0 est stable.

14. On impose

$$\theta_0 = 0 \Leftrightarrow mga - kyb \cos \phi \Leftrightarrow y_0 = \frac{mga}{kb \cos \phi}.$$

L'équation du mouvement s'obtient grâce au TPC. On la développe au voisinage de θ_0 :

$$\frac{dE_c}{dt} = J\ddot{\theta} = \Gamma(\theta) \approx \Gamma(\theta_0) + \frac{d\Gamma}{d\theta}(\theta_0) \cdot (\theta - \theta_0) = 0 - \frac{d^2 E'_p}{d\theta^2}(\theta_0) \cdot (\theta - \theta_0) \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 (\theta - \theta_0) = 0 \quad \text{avec}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{J} \frac{d^2 E'_p}{d\theta^2}(\theta_0)}. \quad \text{En considérant la valeur de } y_0 \text{ et } \theta_0 = 0, \text{ ceci conduit à}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{ky_0 b \sin \phi}{J \cos \theta_0}} = \sqrt{\frac{mga \tan \phi}{ma^2}} \Leftrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g_0 \tan \phi}{a}}.$$

15. On inverse : $\phi = \arctan \left(\frac{4\pi^2 a}{T_0^2 g_0} \right) \approx 9,9 \times 10^{-5} \text{ rad} = 5,7 \times 10^{-3} \text{ °}$. Il s'agit d'un angle très faible, toutefois ajustable avec des vis de précision.

16. En utilisant les expressions vérifiées par θ_0 et y_0 , on obtient

$$\tan \theta'_0 = \frac{m(g_0 + \Delta g)a - ky_0 b \cos \phi}{ky_0 b \sin \phi} = \frac{mga - ky_0 b \cos \phi + m\Delta ga}{mga \tan \phi} = 0 + \frac{m\Delta ga}{mga \tan \phi}.$$

$$\Leftrightarrow \tan \theta'_0 \approx \theta'_0 \approx \frac{\Delta g}{g_0 \tan \phi} = 1,0 \times 10^{-4} \text{ rad} = 5,8 \times 10^{-3} \text{ °}.$$

De nouveau il s'agit d'un angle très faible, toutefois mesurable avec un dispositif de précision (via un nouvel ajustement de y par exemple).

I.3. Applications de la gravimétrie

17. On applique toujours la loi de Newton, valable à l'extérieur de la boule puisque celle-ci est à symétrie sphérique : $\vec{g}_B = -\frac{GM_B}{r^2} \vec{e}_r$, où la masse M_B de la boule s'écrit $\frac{4\pi}{3} R^3 \mu'$.

Comme $-\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z = \cos \theta = \frac{h}{r}$, on obtient $g_{Bz} = \frac{G\mu' 4\pi R^3 h}{3r^3}$. Or $r^2 = h^2 + x^2$ donc $g_{Bz} = \frac{4\pi G\mu' R^3 h}{3(h^2 + x^2)^{3/2}}$.

18. On peut décomposer le champ de pesanteur local $g_z = g_0 + \Delta g$ comme la somme de :

- celui créé par une Terre supposée de masse volumique uniforme μ_m , qui vaut ici g_0 ;
- celui créé par une boule de masse volumique $\mu' - \mu_m = \Delta\mu$, qui constitue l'anomalie Δg .

D'après le calcul précédent en remplaçant μ' par $\Delta\mu$, cette anomalie vaut $\Delta g = \frac{4\pi G\Delta\mu R^3 h}{3(h^2 + x^2)^{3/2}}$.

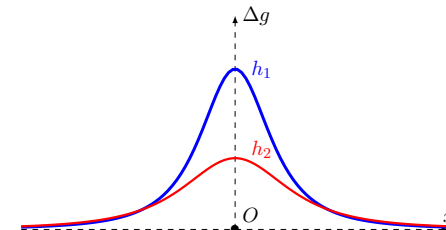
19. La fonction $\Delta g(x)$ est paire, et décroissante avec $|x|$. La valeur maximale obtenue pour $x = 0$ vaut

$$\Delta g_{\max} = \frac{4\pi G\Delta\mu R^3}{3h^2}, \quad \text{ce qui donne } \Delta g(x) = \frac{\Delta g_{\max}}{\left(1 + \frac{x^2}{h^2}\right)^{3/2}}.$$

La largeur à mi-hauteur Δx est donc telle que

$$\left(1 + \frac{\Delta x^2}{4h^2}\right)^{3/2} = 2 \Leftrightarrow \Delta x = 2h \sqrt{\sqrt[3]{4} - 1} \approx 1,5h.$$

Plus h est grand, plus le maximum est faible (car le défaut est éloigné) et plus l'anomalie est étalée, ce qui donne les allures ci-contre pour $h_1 < h_2$.



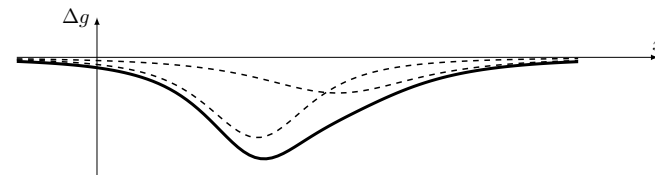
20. Sur la courbe proposée on lit la largeur à mi-hauteur $\Delta x = 120 \text{ m}$ donc $h \approx 78 \text{ m}$, puis la valeur maximale

$$\Delta g_{\max} = 2,8 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \text{ permet de déterminer } R = \left(\frac{3h^2 \Delta g_{\max}}{4\pi G\Delta\mu}\right)^{1/3} = 39 \text{ m}.$$

21. Il faut que l'effet cumulé de l'or et de la grotte s'annulent, donc d'une part disposer l'or sous la forme d'une boule située au centre, et d'autre part faire en sorte que la masse totale de l'or soit la même que celle manquante dans la grotte, ce qui est possible uniquement si l'or est plus dense que le sol, ce qui est le cas.

La grotte vide est en fait remplie d'air de masse négligeable, donc on peut considérer $\Delta\mu = -\mu_m$. La masse maximale d'or est donc $m_{\text{or}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \mu_m = 8,4 \times 10^3 \text{ kg}$.

22. Les grottes étant vides, elles correspondent à des anomalies négatives. Si la première est à une profondeur h , la seconde est à une profondeur environ $\frac{3}{2}h$ et décalée horizontalement d'environ h , donc forme une anomalie moins intense et plus étalée. Le graphe obtenu est ci-dessous (composantes individuelles en pointillés).



4. Attention erreur d'énoncé : lire g_z et non g_{Bz} ...

II. Planètes extra-solaires

1. a) La force exercée par l'étoile sur la planète s'écrit $\vec{F} = -\mathcal{G} \frac{mM}{EP^3} \cdot \vec{EP} = -\mathcal{G} \frac{mM}{r^2} \cdot \vec{e}_r$, qu'on notera $F(r)\vec{e}_r$. Pour calculer l'énergie potentielle d'interaction, on peut supposer l'étoile fixe et donc seulement la force de l'étoile sur la planète.

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{EP} = F(r)\vec{e}_r \cdot (dr\vec{e}_r + r d\vec{e}_r) = F(r)dr$$

car $\vec{e}_r \cdot d\vec{e}_r = 0$ (car il est de norme constante). On en déduit $\delta W = -dE_p(r)$ en posant $E_p(r) = -\frac{\mathcal{G}mM}{r}$, qui est bien nulle à l'infini.

- b) On note \vec{v} la vitesse de la planète P dans \mathcal{R} . Le théorème du moment cinétique appliqué à P au point E fixe dans \mathcal{R} galiléen s'écrit :

$$\left. \frac{d\vec{\sigma}(E)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{EP} \wedge \vec{F} = r\vec{e}_r \wedge F(r)\vec{e}_r = \vec{0} \Rightarrow \vec{\sigma}(E) = \vec{EP} \wedge m\vec{v} = \text{constanté} = \vec{\sigma}_0.$$

Ainsi, à tout instant le vecteur position \vec{EP} est orthogonal au moment cinétique constant $\vec{\sigma}_0$, donc la trajectoire du mouvement appartient au plan orthogonal à $\vec{\sigma}_0$ passant par E . **Le mouvement est donc plan.**

2. a) On utilise les coordonnées et la base polaires dans un repère centré sur l'étoile E . Pour un mouvement circulaire de rayon a , le Théorème de la Résultante Cinétique (TRC) dans \mathcal{R} galiléen conduit à

$$-ma\dot{\theta}^2 = -\frac{K}{a^2} \text{ selon } \vec{u}_r, \text{ avec } K = \mathcal{G}Mm.$$

Ceci conduit à $\dot{\theta}^2 = \frac{\mathcal{G}M}{a^3}$, qui est une constante donc **le mouvement est uniforme** (ce qui découle aussi de la conservation du moment cinétique). **La vitesse angulaire est donc égale à sa valeur moyenne :**

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{2\pi}{T} \\ \dot{\theta}^2 &= \frac{\mathcal{G}M}{a^3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{a^3}{T^2} = \frac{\mathcal{G}M}{4\pi^2}$$

qui est la **3ème loi de Kepler**. Ainsi le rapport $\frac{a^3}{T^2}$ pour la trajectoire d'un satellite pour un même astre central fixe est le même quelque soit le satellite.

- b) En prenant la masse du Soleil pour 51-Peg on obtient $a = \left(\frac{\mathcal{G}M_S T^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} = 7,4 \times 10^9 \text{ m} = 0,049 \text{ u.a.}$

3. a) La trajectoire elliptique est un état d'énergie mécanique constante $E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mathcal{G}Mm}{r^2}$. Donc par conservation, la distance au centre de force r diminue lorsque v augmente et vice versa.

Ainsi **la vitesse maximale v_M est obtenue pour r_M minimale, donc au périastre** (ou péri-centre).

Inversement **la vitesse minimale v_m est obtenue pour r_M maximale, donc à l'apoastre** (ou apocentre).

- b) Le moment cinétique de P en E est conservé, et s'écrit $\vec{\sigma}(E) = m r \vec{u}_r \wedge (\dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta) = m r^2 \dot{\theta} \vec{u}_z$. Il est constant donc $C = r^2 \dot{\theta}$ est constante. À l'apoastre et au périastre $\dot{r} = 0$ donc $\vec{v} = r \dot{\theta} \vec{u}_\theta = \frac{C}{r} \vec{u}_\theta$ en ces positions. On en déduit $|C| = r_m v_m = r_M v_M$.

On rappelle que $r_m = r_{\max} = a + c$ et $r_M = r_{\min} = a - c$ ici. D'où

$$\frac{v_m}{v_M} = \frac{r_M}{r_m} = \frac{a - c}{a + c} = \frac{1 - \frac{c}{a}}{1 + \frac{c}{a}} \Leftrightarrow \frac{v_m}{v_M} = \frac{1 - e}{1 + e}.$$

SCHEMA
ellipse, a, c, r_{\max} et r_{\min} .

Ce rapport est bien positif car $e < 1$ pour une ellipse.

Autre méthode possible (pas celle suggérée par cet énoncé...) : introduire l'équation polaire de la trajectoire et la paramètre $p, r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$. On en déduit $r_m = r_{\max} = \frac{p}{1 - e}$ et $r_M = r_{\min} = \frac{p}{1 + e}$, d'où le résultat.

- c) La relation précédente repose sur la conservation du moment cinétique, donc il faut maintenant chercher une relation issue de la conservation de l'énergie. Pour une trajectoire elliptique on a $E_m = -\frac{K}{2a}$, donc dans le but de réutiliser le résultat précédent :

$$\left. \begin{aligned} \frac{K}{r_m} &= \frac{1}{2} m v_m^2 + \frac{K}{2a} \\ \frac{K}{r_M} &= \frac{1}{2} m v_M^2 + \frac{K}{2a} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{r_M}{r_m} = \frac{\frac{v_m^2}{v_M^2} + \frac{\mathcal{G}M}{av_M^2}}{1 + \frac{\mathcal{G}M}{av_M^2}} \Leftrightarrow \frac{1 - e}{1 + e} = \frac{\frac{(1 - e)^2}{(1 + e)^2} + \frac{\mathcal{G}M}{av_M^2}}{1 + \frac{\mathcal{G}M}{av_M^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathcal{G}M}{av_M^2} \frac{2e}{1 + e} = \frac{1 - e}{1 + e} \left(1 - \frac{1 - e}{1 + e} \right) = \frac{1 - e}{1 + e} \frac{2e}{1 + e} \Leftrightarrow v_M = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M}{a}} \cdot \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}}.$$

Cette vitesse devient infinie pour $e \rightarrow 1$ car alors $c \rightarrow a$ (qui est fixé et fini) et donc le périastre est confondu avec le centre de force, d'où une énergie potentielle infinie négative.

Méthode plus rapide que celle suggérée par l'énoncé :

$$\frac{1}{2} m v_M^2 = \frac{K}{r_M} - \frac{K}{2a} \text{ avec } r_M = a - c = a(1 - e) \dots$$

d'où le résultat.

- d) En 2.a) on a trouvé $\dot{\theta}^2 = \frac{\mathcal{G}M}{a^3}$. Or pour un mouvement circulaire $v_0 = |\vec{v}_0| = a|\dot{\theta}|$, d'où $v_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M}{a}}$

et $\frac{v_M}{v_0} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}}$. On retrouve bien $v_M = v_0$ pour un mouvement circulaire, pour lequel $e = 0$.

Application numérique : $\frac{v_M}{v_0} \approx 2,3$ pour 16 CygB.

4. a) Le barycentre est défini par $m\vec{OP} + M\vec{OE} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{EO} = \frac{m}{m + M} \vec{EP}$, d'où

$$\vec{V} = \left. \frac{d\vec{EO}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = -\frac{m}{M} \left. \frac{d\vec{OP}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = -\frac{m}{M} \vec{v} \Rightarrow V = \frac{m}{M} v.$$

- b) La loi de Kepler trouvée précédemment pour v donnait pour un mouvement circulaire $v = \frac{2\pi a}{T} =$

$$\frac{2\pi}{T} \left(\frac{\mathcal{G}M T^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{2\pi \mathcal{G}M}{T} \right)^{\frac{1}{3}}. \text{ D'où } V = m \left(\frac{2\pi \mathcal{G}}{M^2 T} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

- c) On en déduit $m = V \left(\frac{M^2 T}{2\pi \mathcal{G}} \right)^{\frac{1}{3}} \approx 9 \times 10^{26} \text{ kg}$. Il s'agit d'une **planète géante**.

5. On peut réutiliser la relation trouvée en 4.a) d'où $m = M \frac{V_M}{v_M}$, et celle trouvée en 3.d) : $v_M = v_0 \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}}$

avec $v_0 = \left(\frac{2\pi \mathcal{G}M}{T} \right)^{\frac{1}{3}}$ d'après 4.b). Ceci conduit à $m = V_M \left(\frac{M^2 T}{2\pi \mathcal{G}} \right)^{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \approx 7 \times 10^{25} \text{ kg} \sim 10 M_T$.

Cette planète est donc **probablement tellurique** car de masse plus proche de celle de la Terre.

III. Principe d'un porte-oculaire de lunette astronomique (d'après Centrale TSI 2016)

III.1. Lunette horizontale

- \mathcal{T} est un solide en rotation uniforme autour d'un axe fixe de vecteur rotation $\omega \vec{u}_z$, donc le point A a un mouvement circulaire de rayon a , de vitesse $\vec{V}_{A \in \mathcal{T}} = a\omega \vec{e}_x$.
- La loi de Coulomb en condition de glissement s'écrit $|T_A| = fN_A = fF$. Comme la force de frottement sur \mathcal{T} , $-\vec{T}_A$, s'oppose à la vitesse de glissement, donc à $\vec{V}_{A \in \mathcal{T}}$, on a $T_A > 0$ si $\omega > 0$. Finalement $T_A = fF$.
La vitesse de glissement s'écrit : $\vec{v}_g = \vec{V}_{A \in \mathcal{T}} - \vec{V} = (a\omega - \dot{x}) \vec{u}_x$. Comme \mathcal{T}_2 a une vitesse nulle initialement, et qu'il lui faut du temps pour se mettre en mouvement à cause de sa masse importante, on a nécessairement $\vec{v}_g \neq \vec{0}$ au début.
- Le solide \mathcal{T}_2 subit les résultantes suivantes :
 - son poids $M\vec{g}$, selon \vec{u}_y ;
 - la réaction de \mathcal{T} : $\vec{N}_A + \vec{T}_A$;
 - la réaction des roulements à bille \vec{R}_b , nécessairement selon \vec{u}_y car on néglige tout frottement sur la liaison glissière.
- On se place donc en situation de glissement, d'où $\vec{T}_A = fF\vec{u}_x$. Le Théorème de la Résultante Cinétique (TRC) appliqué à \mathcal{T}_2 dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen s'écrit alors :

$$M\ddot{x}\vec{u}_x = M\vec{g} + \vec{N}_A + \vec{T}_A + \vec{R}_b \Rightarrow M\ddot{x} = fF$$

par projection selon \vec{u}_x , et sous l'hypothèse du glissement qui est valable tant que $\dot{x} < a\omega$. Comme $\dot{x}(0) = 0$, l'intégration conduit à

$$V(t) = \dot{x}(t) = \frac{fF}{M} t \quad \text{pour } t < t_1,$$

instant auquel le glissement cesse car $V(t_1) = V_1 = a\omega \Leftrightarrow t_1 = \frac{Ma\omega}{fF}$. Après cet instant, \mathcal{T}_2 poursuit son mouvement sans glissement par rapport à \mathcal{T} donc

$$V(t) = V_1 = a\omega \quad \forall t \geq t_1.$$

- Le calcul précédent conduirait à une durée $t_2 = \frac{MV_0}{fF}$ nécessaire pour atteindre la vitesse V_0 . Comme \mathcal{T} est stoppé, la vitesse de glissement vaut maintenant $\vec{v}_g = -\dot{x}\vec{u}_x$. Elle a donc changé de signe, et la loi de Coulomb donne alors $\vec{T}_A = -fF\vec{u}_x$. L'équation du mouvement s'écrit donc maintenant

$$M\ddot{x} = -fF \quad \text{d'où } V(t) = -\frac{fF}{M}(t - t_2) + V_0,$$

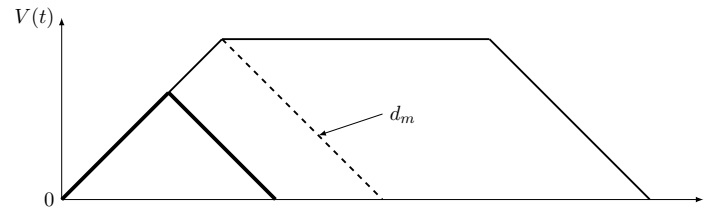
après intégration. L'arrêt est obtenu au bout de la durée $t'_2 - t_2$ telle que $V(t'_2) = 0 \Leftrightarrow t'_2 - t_2 = \frac{MV_0}{fF} = t_2$.

La durée du freinage est donc égale à celle de la mise en mouvement.

Les distances parcourues dans chaque phase seront aussi égales par symétrie de la courbe de vitesse, à savoir $D = \int_0^{t_1} \frac{fF}{M} t dt = \frac{fF t_1^2}{2M}$ d'où $D = \frac{MV_0^2}{2fF}$.

- Si $V_0 \leq V_1$, la distance parcourue est $d = 2D = \frac{MV_0^2}{fF} \leq \frac{MV_1^2}{fF} = \frac{Ma^2\omega^2}{fF}$, donc $d < d_m = \frac{Ma^2\omega^2}{fF}$.

Si $d > d_m$, alors $V_0 > V_1$ et donc \mathcal{T}_2 passe par une phase de non glissement intercalée entre la phase d'accélération et celle de freinage.



Application numérique : $\omega = \frac{1 \times 2\pi}{1}$, d'où $d_m = 0,20$ mm. Ainsi on a toutes les chances de passer par la phase intermédiaire de non glissement, qui va constituer la grande majorité du déplacement, ce qui garantit une bonne précision dans la maîtrise du positionnement du dispositif.

- On applique le théorème scalaire du moment cinétique selon l'axe fixe Az au système { molette + \mathcal{T} }. Pendant le glissement $T_A = fF$, et ω est constante donc le moment cinétique est constant, d'où

$$0 = \mathcal{M}_{astro}^{Az} + \mathcal{M}_{contact A}^{Az} + \mathcal{M}_{pivot}^{Az} + \mathcal{M}_{pes}^{Az} \Leftrightarrow 0 = 2F_d b - fF a + 0 + 0$$

car la liaison pivot de la tige est supposée parfaite (en l'absence de données...) et le centre de masse du système est sur l'axe Az . On en déduit $\Leftrightarrow F_d = \frac{fFa}{2b} = 0,3$ N.

Pendant le non glissement $T_A = M\dot{V} = 0$ car le mouvement de \mathcal{T}_2 est alors uniforme, et donc $F_d = 0$. Cela signifie qu'une fois que \mathcal{T}_2 est lancé, l'entraînement nécessite une force nulle (aux frottements de la glissière négligés près).

- Au regard des questions précédentes, on a intérêt à augmenter F pour minimiser la distance occupée par les phases de glissement, mais pas trop car sinon la force à appliquer sur la molette au démarrage et au freinage devient trop importante pour une manipulation confortable.

III.2. Lunette inclinée

- On projette le TRC selon l'axe du tube Ox maintenant incliné. Le tube \mathcal{T} se met à glisser vers le bas si

$$M\ddot{x} = Mg \sin \alpha - fF > 0 \Leftrightarrow \alpha > \alpha_{\max} = \arcsin \left(\frac{fF}{Mg} \right) = 31^\circ.$$

L'angle de visée ce jour là étant de l'ordre de $\alpha = 58^\circ$, il faudra un dispositif de serrage additionnel.