

# MÉCANIQUE

## CALCULATRICES AUTORISÉES

### I. Techniques de gravimétrie

#### Formulaire

- Dérivée logarithmique de la fonction  $f(x) = x^\alpha : \frac{d \ln x^\alpha}{dx} = \frac{\alpha}{x}$  ;
- Différentielle logarithmique de la fonction  $f(x) = x^\alpha : d(\ln x^\alpha) = \alpha \frac{dx}{x}$  ;

Application : pour calculer une petite *variation relative* de la fonction  $f(x) = x^\alpha$  due à une petite variation  $\Delta x$  de  $x$ , on utilise la différentielle logarithmique :

$$\frac{\Delta f}{f} \approx \Delta \ln f \approx \alpha \frac{\Delta x}{x}.$$

Pour déterminer le champ de pesanteur localement, les géophysiciens disposent d'instruments appelés *gravimètres*. Le premier gravimètre utilisé historiquement a été un pendule.

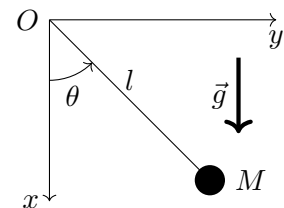
#### I.1. Méthodes de mesure du champ de pesanteur à l'aide de pendules

##### Le pendule de Richter

1. Comment l'utilisation d'un pendule simple (figure ci-contre) permet-elle de remonter à la mesure de l'intensité du champ de pesanteur  $g$  ?

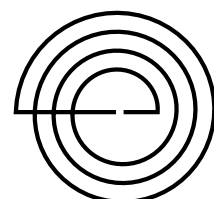
*On pourra répondre sans établir l'équation du mouvement.*

2. En 1672 l'astronome Richter part à Cayenne en Guyane avec une horloge à pendule réglée à Paris (pendule qui bat la seconde), il s'aperçoit qu'elle retarde de 2 min 28 s par jour. En déduire la valeur de  $g$  à Cayenne (à Paris  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ ).
3. Déterminer l'expression du champ gravitationnel  $\vec{G}(z)$  créé par la Terre à une altitude  $z > 0$ , en notant  $M_T$  la masse de la Terre, et  $R_T$  son rayon (on suppose la Terre sphérique, avec  $R_T \approx 6,4 \times 10^3 \text{ km}$ ).  
Sachant que l'altitude de Paris varie entre 28 et 131 m et l'altitude de Cayenne entre 0 et 105 m, l'écart mesuré entre Cayenne et Paris est-il imputable à la différence d'altitude ? (calcul attendu)  
Sinon à quoi ?
4. On admet que l'incertitude de mesure provient essentiellement de la mesure de la période  $T$ . Quelle devrait être l'incertitude sur la mesure de la période du pendule utilisé par Richter pour que l'incertitude sur la mesure de  $g$  soit égale à  $1 \mu\text{gal}$  ( $1 \text{ gal} = 1,00 \text{ cm.s}^{-2}$ , ordre de grandeur de la précision des gravimètres actuels) ?



##### Le pendule vertical

La mesure de l'élongation d'un ressort vertical au bout duquel est suspendue une masse permet de mesurer les variations du champ de pesanteur. L'ingénieur Lucien LaCoste a inventé un ingénieux ressort à spirale de longueur à vide nulle (figure ci-contre).



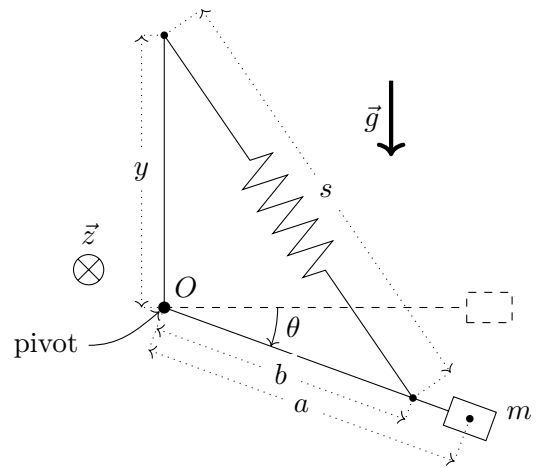
5. Si le champ de pesanteur terrestre varie de  $10 \mu\text{gal}$ , que vaut la variation de l'élongation d'un ressort usuel d'un laboratoire de lycée ?
6. Quel est l'intérêt d'utiliser un ressort de longueur à vide nulle ?

## I.2. Gravimètre à fléau de LaCoste et Romberg

Le gravimètre de LaCoste et Romberg est un gravimètre qui permet de mesurer l'intensité du champ de pesanteur avec une incertitude typique de  $1 \mu\text{gal}$ .

Une tige de longueur  $a$ , de masse négligeable, porte une masse  $m$  à l'une de ses extrémités et pivote sans frottement autour de l'axe  $Oz$  (figure ci-contre). L'ensemble forme un solide de moment d'inertie  $J = ma^2$  par rapport à  $Oz$ .

Le mouvement de la masse est repéré par l'angle  $\theta$ , orienté par rapport à l'axe  $(Oz)$ , il est donc positif sur la figure. La tige est retenue par un ressort de masse négligeable, de constante de raideur  $k$ , de longueur  $s$  et de longueur à vide  $s_0$ . Ce ressort est fixé sur la tige à la distance  $b$  du point pivot. La longueur  $y$  peut être ajustée grâce à une vis micrométrique. Le dispositif est contenu dans un plan vertical, l'axe  $Oz$  est perpendiculaire à ce plan. Les positions possibles sont techniquement limitées à  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . La mesure du champ de pesanteur se fait via la recherche de la position d'équilibre.



7. Pour le système gravimètre {tige + ressort + masse  $m$ }, écrire l'expression de l'énergie potentielle totale  $E_p$  du système en fonction de  $\theta$ ,  $s$  et des paramètres utiles.

*On ne demande pas de démontrer l'expression de générale des énergies potentielles.*

8. Établir l'expression de  $s$  en fonction de  $y$ ,  $b$  et  $\theta$ .
9. Quelles hypothèses permettent de supposer le système conservatif? On les supposera vérifiées par la suite.

Montrer, en utilisant le théorème de la puissance cinétique, que dans ces conditions le système est soumis à un moment résultant  $\Gamma$  par rapport à  $Oz$  vérifiant  $\Gamma = -\frac{\partial E_p}{\partial \theta}$ . On notera  $J$  le moment d'inertie de la tige et de la masse par rapport à l'axe  $Oz$ .

On suppose maintenant et pour toute la suite que ce ressort a été fabriqué de telle manière que sa longueur à vide  $s_0$  est nulle (cf figure ci-dessus du ressort spirale).

10. Quelle(s) est (sont) la (les) position(s) d'équilibre?

Montrer que sa (leur) stabilité dépend du réglage de  $y$ . Préciser les différents cas.

11. Peut-on mesurer  $g$  dans ces conditions? Si oui comment?

Dans la pratique, on incline le point de support du ressort d'un petit angle  $\phi$  (figure ci-dessous).

12. Exprimer  $s$ , puis la nouvelle énergie potentielle  $E'_p$ , en fonction de  $y$ ,  $b$ ,  $\phi$  et  $\theta$ .

13. Montrer qu'il existe une unique position d'équilibre  $\theta_0$ , dont on donnera l'expression.

Montrer qu'elle est stable.

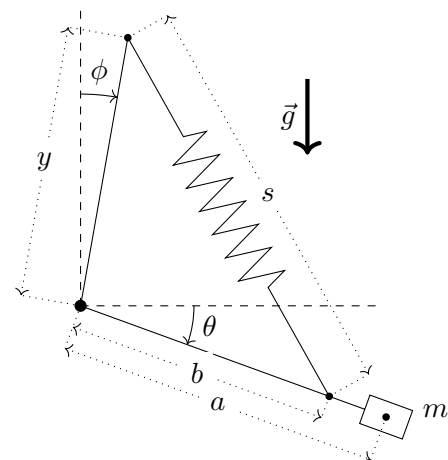
14. Pour une valeur de référence  $g = g_0$ , on ajuste la longueur  $y$  de manière à annuler la position d'équilibre  $\theta_0$ . Exprimer la valeur  $y_0$  correspondante. En déduire que dans ce cas la pulsation des petites oscillations s'écrit

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g_0}{a} \tan \phi}.$$

15. *Application numérique.* De quel angle  $\phi$  doit-on incliner l'instrument pour obtenir des oscillations de période 20 s si  $g_0 \simeq 10 \text{ m.s}^{-2}$  et  $a \simeq b = 1,0 \text{ cm}$ ?

16. L'appareil est ensuite déplacé dans une zone où  $g = g_0 + \Delta g$ . Montrer que la nouvelle position moyenne  $\theta'_0$  est égale à  $\theta'_0 = \frac{\Delta g}{g_0 \tan \phi}$ .

Évaluer  $\theta'_0$  pour  $\Delta g \sim 10 \mu\text{gal}$ . Commenter.

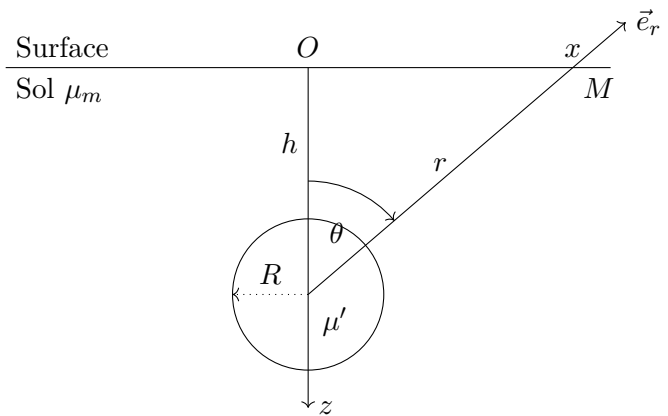


### I.3. Applications de la gravimétrie

La gravimétrie est l'étude des variations du champ de pesanteur dans l'espace et dans le temps. Elle permet de déterminer la répartition des masses au sein de la Terre et d'avoir ainsi accès à sa structure. Par exemple, la gravimétrie est utilisée pour déterminer la forme de la Terre (géodésie, marées), pour détecter des cavités (génie civil ou archéologie), pour suivre les stockages d'eau (hydrologie continentale).

Dans cette partie, nous allons déterminer, par une analyse gravimétrique, les dimensions d'un corps sphérique enterré dans un sol dont la masse volumique moyenne environnante est  $\mu_m$  (figure ci-contre). On note  $R$  le rayon de cette boule,  $\mu' = \mu_m + \Delta\mu$  sa masse volumique (considérée uniforme), et  $h$  la profondeur de son centre par rapport à la surface.

On rappelle que le champ gravitationnel créé par la boule (à l'extérieur d'elle-même) vérifie la même loi que celui créé par une masse ponctuelle (comme c'est le cas pour la Terre en question 3.).



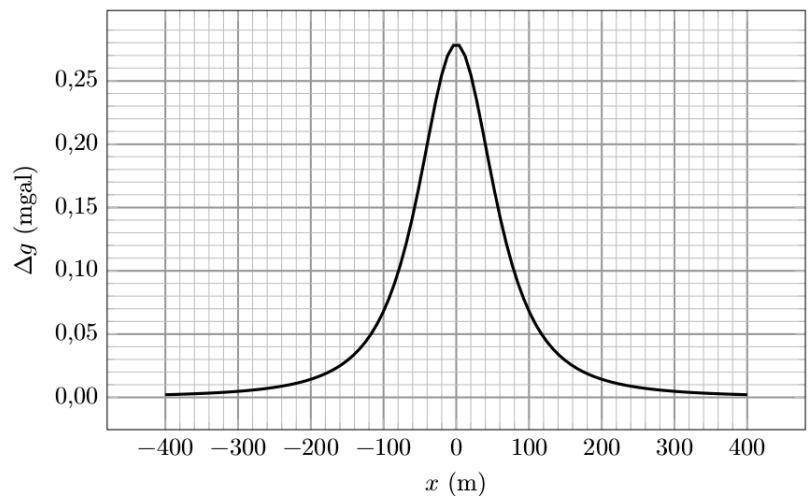
17. Donner l'expression de  $g_{Bz}$ , composante verticale (dirigée selon  $Oz$ ) du champ gravitationnel créé par cette boule en un point  $M$  à la surface, en fonction des paramètres géométriques  $h, x$  (abscisse de  $M$ ) et  $R$ .

18. Loin de la boule (pour  $r \gg R$ ), le champ de pesanteur est vertical de valeur  $g_0$ . Montrer que l'anomalie gravimétrique de la composante verticale du champ à proximité de la boule,  $\Delta g = g_z - g_0$ , s'écrit alors

$$\Delta g = \frac{4\pi G \Delta\mu R^3 h}{3(x^2 + h^2)^{3/2}}.$$

19. Donner l'expression de l'anomalie maximale  $\Delta g_{\max}$ , ainsi que de sa largeur à mi-hauteur  $\Delta x$  ?

Tracer l'allure de la courbe  $\Delta g(x)$  pour des boules identiques enterrées à deux profondeurs différentes  $h_1$  et  $h_2 > h_1$ .

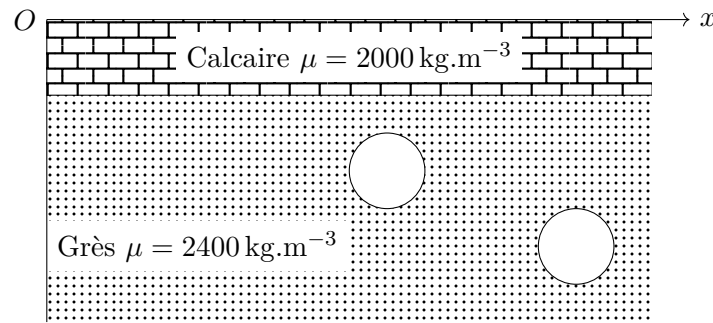


Anomalie gravimétrique  $\Delta g$  pour une sphère enterrée avec  $\Delta\mu = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ .

20. Déterminer, à l'aide la courbe de la figure ci-dessus, la profondeur  $h$  et le rayon  $R$  de la sphère enterrée. On rappelle la constante de gravitation universelle :  $\mathcal{G} = 6,67 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1}.\text{m}^3.\text{s}^{-2}$ .

21. Comment rendre indétectable par analyse gravimétrique de l'or stocké dans une grotte sphérique ? La grotte de 1 m de rayon est à 4 m de profondeur, dans un sol de type calcaire ( $\mu_m \approx 2000 \text{ kg.m}^{-3}$ ). Quelle masse d'or est-il possible de cacher par cette méthode ? Pour information, la masse volumique de l'or est  $\rho_{\text{or}} = 19,3 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ .

22. Une étude archéologique préalable prévoit la disposition de deux grottes sphériques de même dimension (figure ci-dessus). Tracer l'allure de la courbe de l'anomalie gravimétrique attendue  $\Delta g = f(x)$ .



## II. Planètes extra-solaires

Une exoplanète est une planète tournant autour d'une étoile autre que notre soleil, c'est-à-dire une planète n'étant pas dans notre système solaire.

La première a été détectée en 1995 par l'équipe de l'astronome Michel Mayor. Cette première planète extrasolaire orbite autour d'une étoile de la séquence principale, 51 Peg. Cependant, les 334 exoplanètes découvertes hors de notre système solaire entre 1995 et le début de 2009 n'ont pas été observées directement mais via les perturbations qu'elles provoquent sur leur étoile. Pour l'instant il est impossible d'observer visuellement la surface de ces planètes.

Une planète est dite *tellurique* si elle est analogue en masse et en composition à la Terre ; elle est dite *géante* si elle est comparable à Jupiter. Parmi les 334 planètes découvertes hors de notre système solaire entre 1995 et le début de 2009, la plupart sont gigantesques, de type jovienne, et on n'en a pas encore trouvé de semblables à la Terre. De plus, il existe d'autres étoiles qui sont entourées d'un disque de poussière qui pourrait être un système planétaire en formation.

Toutefois il y en a trois qui semblent être différentes. Leur masse est comprise entre 7 et 20 fois celle de la Terre, ce qui en fait de très petites exoplanètes. Et elles seraient les premières planètes rocheuses découvertes jusqu'à aujourd'hui. La pesanteur sur ces exoplanètes serait trois fois plus importante que sur la Terre. Les étoiles qui abritent ces trois spécimens sont relativement près de nous. L'étoile 55 Can  $\epsilon$  se trouve à 43, 6 a.l. (années lumières), Gliese 436  $\beta$  à 33, 2 a.l. et Mu Arae  $\delta$  à 50 a.l. Deux de ces étoiles sont de type spectral G, c'est-à-dire semblables à notre Soleil.

On s'intéresse tout spécialement au cas de l'étoile 51 Peg (Peg pour Pegasi car dans la constellation de Pégase), vraisemblablement accompagnée d'une planète orbitant en 4 jours. Cette étoile est de type solaire. Pour les calculs on supposera sa masse égale à celle du soleil. Le système constitué par l'étoile et sa planète est considéré comme isolé, dans le référentiel d'étude  $\mathcal{R}$  supposé galiléen.

*Données numériques :*

- Constante de gravitation universelle :  $\mathcal{G} = 6,67 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$  ;
- Masse du Soleil :  $M_S = 2,0 \times 10^{30} \text{ kg}$  ;
- Masse de la Terre :  $M_T = 6,0 \times 10^{24} \text{ kg}$  ;
- Masse de Jupiter :  $M_J = 2,0 \times 10^{27} \text{ kg}$  ;
- Distance Terre-Soleil :  $1 \text{ u.a.} = 1,5 \times 10^{11} \text{ m}$  ;
- Rayon du Soleil :  $R_S = 7,0 \times 10^8 \text{ m}$  ;
- Rayon de la Terre :  $R_T = 6,4 \times 10^6 \text{ m}$  ;
- Rayon de Jupiter :  $R_J = 7,1 \times 10^7 \text{ m}$  ;

L'unité astronomique (u.a) est égale par définition au demi-grand axe de l'orbite terrestre.

1. a) Rappeler l'expression de la force d'interaction gravitationnelle entre la planète  $P$  et son étoile  $E$ , de masse respectives  $m$  et  $M$  assimilées à des points matériels. Établir l'expression de l'énergie potentielle  $E_p(r)$  correspondante en prenant  $E_p(\infty) = 0$ . On posera  $\overrightarrow{EP} = r\vec{e}_r$  où  $\vec{e}_r$  est un vecteur unitaire.
- b) Pourquoi le mouvement de  $P$  est-il plan ? Justifier précisément, en supposant que l'étoile est fixe dans  $\mathcal{R}$ .  
On admettra que le mouvement est toujours plan même si l'étoile est mobile.

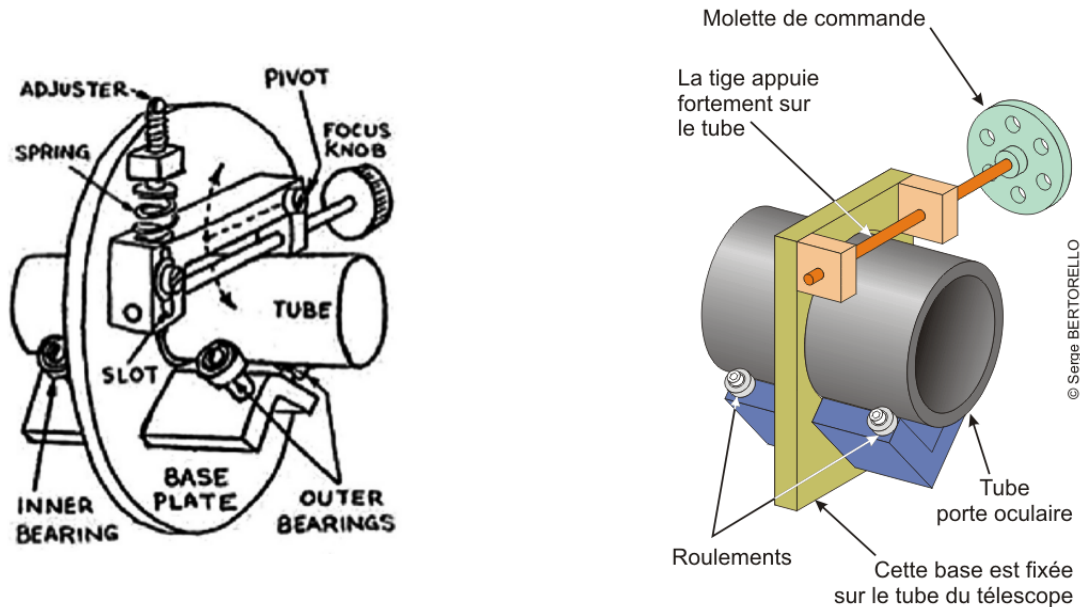
2. Dans un premier temps, on néglige la masse de la planète devant celle de son étoile, ce qui permet de considérer l'étoile fixe.
- Pour un mouvement circulaire de rayon  $a$  et de période  $T$ , établir l'expression du rapport  $X = \frac{a^3}{T^2}$  et commenter le résultat.
  - Donner un ordre de grandeur du rayon de la trajectoire circulaire d'une planète orbitant en 4 jours autour de l'étoile 51 Peg.
3. Toujours en considérant l'étoile fixe, on s'intéresse à une orbite elliptique, de demi-grand axe  $a$  et d'excentricité  $e$ . On rappelle que l'excentricité d'une ellipse est notamment le rapport  $c/a$  où  $c$  représente dans cette question la distance d'un des foyers au centre de symétrie de la trajectoire.
- Soient  $v_m$  et  $v_M$  les valeurs respectivement minimale et maximale de la vitesse de la planète sur son orbite. Pour quels points caractéristiques de cette orbite sont-elles obtenues ? Justifier quantitativement.
  - On note  $r_m$  et  $r_M$  les distances à l'étoile correspondant respectivement à  $v_m$  et  $v_M$ . Établir une relation entre  $r_m$ ,  $r_M$ ,  $v_m$  et  $v_M$ .  
En déduire le rapport  $\frac{v_m}{v_M}$  en fonction de  $e$  uniquement.
  - Obtenir indépendamment de ce qui précède une expression reliant  $v_m$ ,  $v_M$ ,  $a$ ,  $e$  et les paramètres du système. Déterminer alors  $v_M$  en fonction de  $a$ ,  $e$ ,  $M$  et  $\mathcal{G}$ .
  - Soit  $v_0$  la vitesse qu'aurait la planète sur une orbite circulaire de rayon  $a$ . Déterminer  $\frac{v_M}{v_0}$  en fonction de  $e$  uniquement. Calculer ce rapport pour  $e = 0,67$  (cas du candidat exoplanète 16 CygB).

On tient compte maintenant du rapport des masses de la planète et de l'étoile tout en supposant  $m \ll M$ . On peut supposer que les résultats obtenus dans les questions précédentes sont toujours valables en première approximation, mis-à-part que l'étoile est maintenant considérée mobile.

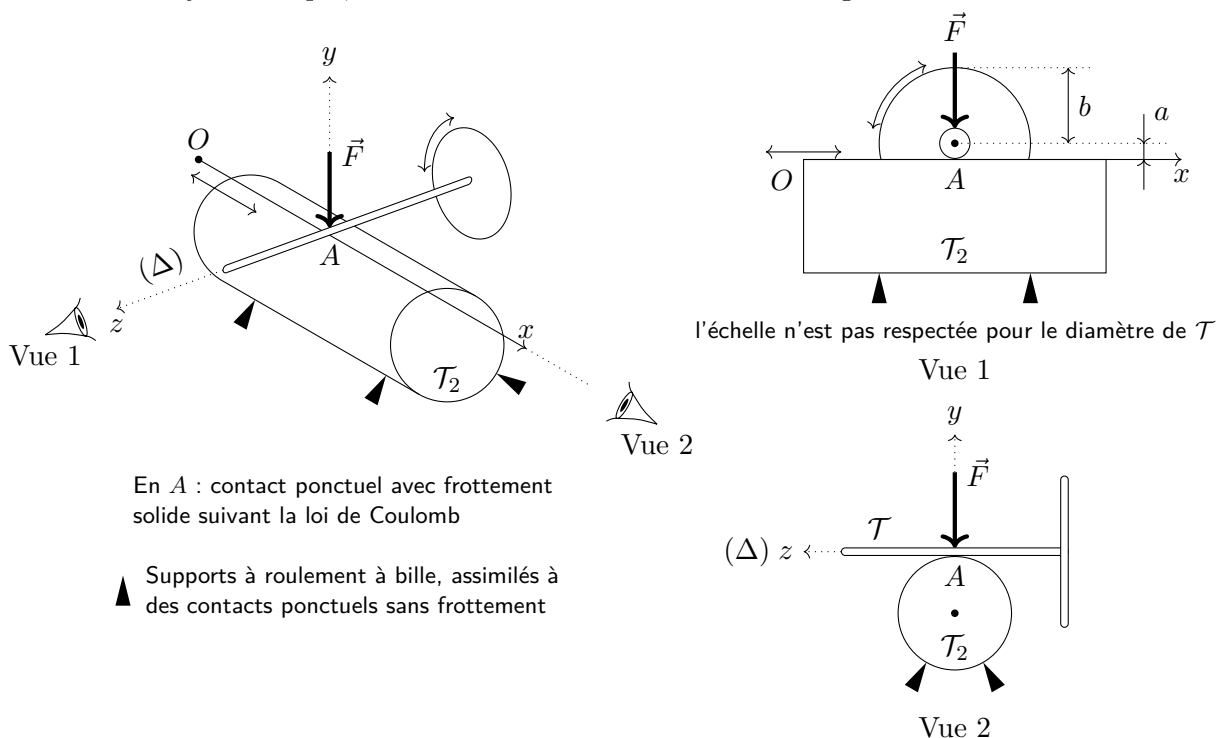
4. On s'intéresse comme annoncé à l'exoplanète 51-PegasiB d'excentricité  $e = 0,014$  (trajectoire quasi circulaire) et de période de rotation très petite (4,2 jours) comparée aux périodes de rotation des planètes du système solaire.
- Définir la position du barycentre  $O$  du système étoile-planète.  
En supposant  $O$  fixe dans le référentiel d'étude, trouver la relation entre les vitesses  $V$  de l'étoile et  $v$  de la planète.
  - Exprimer, pour une orbite circulaire,  $V$  en fonction de  $m$ ,  $M$ ,  $\mathcal{G}$  et de la période  $T$  du mouvement.
  - D'après les observations, les plus courtes périodes mesurées sont de 4 jours, et la vitesse  $V$  de l'étoile est de  $60 \text{ m.s}^{-1}$ . Évaluer la masse  $m$  de la planète. Peut-il s'agir d'une planète de type tellurique ou de type géante ?
5. Dans le cas d'une orbite tellurique, dont la période  $T$  serait aussi de l'ordre de 4 jours, évaluer la masse  $m$  pour  $e = 0,67$  et  $V_M = 10 \text{ m.s}^{-1}$ , où  $V_M$  est la vitesse maximale de l'étoile, qui sera aussi considérée de type solaire.

### III. Principe d'un porte-oculaire de lunette astronomique

Pour faire la mise au point, on utilise un porte-oculaire de type « Crayford », aussi appelé porte oculaire à friction (figures ci-dessous). Ce dispositif a été inventé au début des années 1970 par John Wall, un astronome amateur anglais membre du Crayford Manor Astronomical Society, près de Londres. La figure de gauche reproduit le dessin original du concepteur.



La molette commandée par l'opérateur fait tourner une tige autour d'un axe fixe, qui entraîne par friction le tube coulissant portant l'oculaire d'observation ou une caméra photographique (et éventuellement d'autres accessoires : lentille de Barlow, filtres colorés...). Par rapport au type de porte-oculaires le plus courant, à crémaillère (roue dentée entraînant une crémaillère solidaire du tube porte-oculaire), le Crayford permet un réglage plus souple et plus précis. De nos jours, son usage est très répandu, y compris chez les astronomes professionnels. Dans cette partie, on étudie quelques caractéristiques d'un porte oculaire Crayford simple, modélisé comme schématisé dans la figure ci-dessous.



La norme de la force  $\vec{F}$ , notée  $F$ , est réglable par l'utilisateur au moyen d'une vis comprimant un ressort appuyant sur la tige  $\mathcal{T}$ . Une fois la vis réglée,  $\vec{F}$  reste constante. L'ensemble étant initialement immobile, l'opérateur tourne la molette de mise au point, formant un seul solide avec  $\mathcal{T}$ , à la vitesse angulaire  $\omega$

constante, jusqu'à obtenir une mise au point correcte, puis il immobilise la molette. La mise en mouvement et l'arrêt de la molette sont supposés quasi-instantanés. On étudie le mouvement de translation de  $\mathcal{T}_2$  lors de la mise au point, dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

On donne  $a = 5,0 \text{ mm}$  pour le rayon de  $\mathcal{T}$  et  $b = 50 \text{ mm}$  pour celui de la molette de commande,  $M = 1200 \text{ g}$  pour la masse de  $\mathcal{T}_2$  muni de ses accessoires (Barlow, filtres, caméra...). On modélisera les actions de contact par la loi de Coulomb du frottement solide, et on considérera que les coefficients de frottement statique et dynamique en  $A$  (où s'exerce la seule force de frottement significative) sont identiques et égaux à  $f = 0,30$ .

### III.1. Lunette horizontale

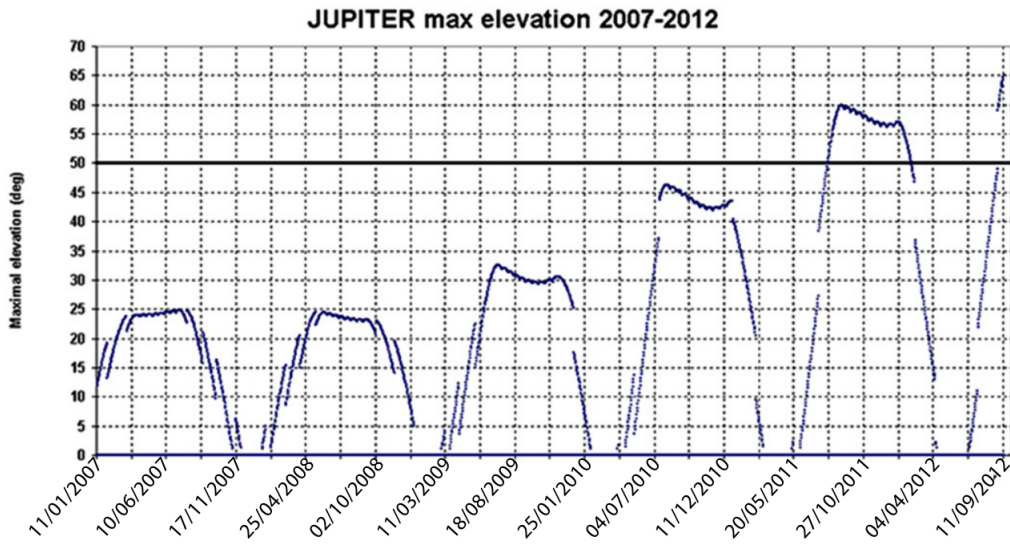
On considère dans cette première sous-partie que la lunette est positionnée horizontalement. On note  $\vec{V} = V\vec{e}_x = \dot{x}\vec{e}_x$  la vitesse de  $\mathcal{T}_2$ , où  $x$  représente la position d'un point quelconque du tube. On note  $\vec{T}_A = T_A\vec{e}_x$  et  $\vec{N}_A$  respectivement les réactions tangentielle et normale subies par  $\mathcal{T}_2$  en  $A$ .

1. L'observateur tourne la molette pour mettre en mouvement  $\mathcal{T}_2$  dans le sens de l'axe  $(Ox)$ . Exprimer la vitesse  $\vec{V}_{A \in \mathcal{T}} = V_{A \in \mathcal{T}}\vec{e}_x$  du point de  $\mathcal{T}$  en contact avec  $\mathcal{T}_2$ , en fonction des paramètres utiles de l'énoncé.
2. Le poids de ce système étant supposé négligeable, on admet que  $\vec{N}_A = \vec{F}$ . En déduire l'expression de  $\vec{T}_A$  dans l'hypothèse du glissement. On supposera  $\omega > 0$ .  
Est-il possible qu'il y ait non glissement au début de la rotation de la molette? Pourquoi?
3. Faire le bilan des forces résultantes agissant sur  $\mathcal{T}_2$ .
4. Déterminer la loi d'évolution de  $\vec{V}(t)$  si on tourne indéfiniment la molette. On distinguera deux phases successives, et on notera  $t_1$  et  $\vec{V}_1$  la date et la vitesse à laquelle on change de phase. Exprimer  $t_1$  et  $\vec{V}_1$ .
5.  $\mathcal{T}_2$  ayant acquis une vitesse  $\vec{V}_0$  ( $V_0 \leq V_1$ ) on immobilise la molette et la tige  $\mathcal{T}$ . Calculer puis comparer le temps d'arrêt de  $\mathcal{T}_2$  au temps mis pour acquérir la vitesse  $\vec{V}_0$ .  
Faire de même pour les distances parcourues lors des étapes de mise en mouvement et de freinage.
6. Expliquer pourquoi, suivant la distance  $d$  à parcourir par  $\mathcal{T}_2$  pour obtenir la bonne mise au point, l'évolution de  $\vec{V}(t)$  sur l'ensemble de l'opération peut se faire soit en deux soit en trois phases.  
Tracer l'allure de  $V(t)$  dans chaque cas, et déterminer la distance  $d_m = d$  à partir de laquelle on a trois phases.  
Calculer sa valeur numérique dans le cas où la molette est actionnée à la vitesse de 1,0 tour par seconde, avec une force de  $F = 20 \text{ N}$ . Commenter.
7. On suppose que l'astronome fait tourner la molette avec 2 doigts diamétralement opposés. En appliquant le théorème du moment cinétique, évaluer la force tangentielle de norme  $F_d$  exercée par chacun des doigts dans les conditions précédentes, pendant la phase de glissement. On supposera toujours  $\omega$  constante.  
Qu'en est-il pendant la phase de non glissement?
8. Quels peuvent être les avantages d'un choix de  $F$  faible ou élevée?

### III.2. Lunette inclinée

La lunette est désormais pointée vers le ciel en direction de Jupiter. Une fois la mise au point effectuée, l'astronome amateur effectue une série de vues pendant toute une nuit. La hauteur angulaire de Jupiter par rapport à l'horizon évolue. Il dispose du graphe de la figure ci-dessous, qui donne la hauteur angulaire maximale de la planète par rapport à l'horizon, nuit par nuit.

9. Déterminer, pour une observation effectuée le 29 octobre 2011 (date où le diamètre apparent de Jupiter est maximal pour cette année-là) et le porte oculaire réglé tel que  $F = 20 \text{ N}$ , si le blocage de la molette à l'issue de la mise au point suffira à maintenir en place  $\mathcal{T}_2$ , ou si on aura besoin d'un dispositif de blocage dédié. Le champ de pesanteur terrestre est supposé de norme  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ .



\* \* \* FIN DE L'ÉPREUVE \* \* \*