

MÉCANIQUE

CALCULATRICES AUTORISÉES

I. Pendule asymétrique

Un objet de masse m supposé ponctuel est fixé sur une tige, très légère, solidaire d'un cylindre de masse négligeable. Ce cylindre de rayon R et de masse négligeable peut tourner autour d'un axe horizontal. La liaison pivot ainsi formée est parfaite et la distance de cet axe au mobile est notée l . Un fil sans masse est enroulé autour du cylindre de telle sorte qu'il ne glisse pas sur le cylindre (la puissance transmise par l'action du cylindre sur le fil est alors nulle). On fixe à l'extrémité libre du fil un objet de masse M (lui aussi supposé ponctuel). Lorsque le cylindre tourne d'un angle θ , M se déplace verticalement de z (on pose donc $z = 0$ lorsque $\theta = 0$). Les variables θ et z sont des grandeurs algébriques définies sur la figure ci-contre.

On admet que le système mécanique constitué par l'ensemble des deux masses est conservatif et que son énergie potentielle est la somme des énergies potentielles de pesanteur des deux masses. On prendra l'origine des énergies potentielles à $z = 0$.

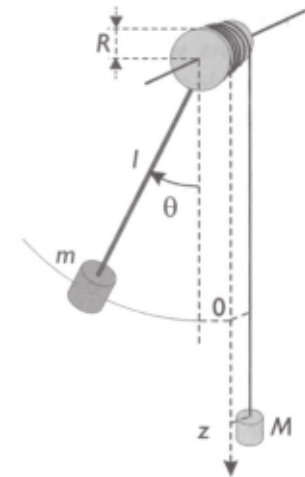
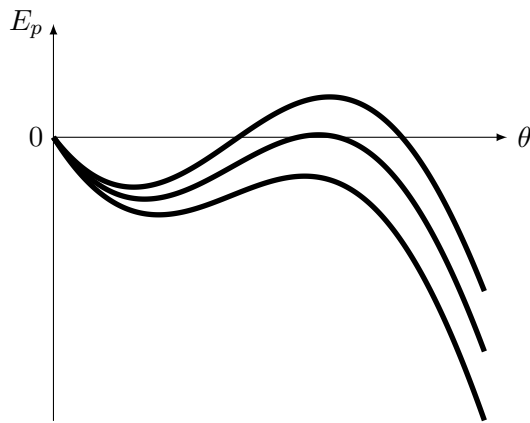
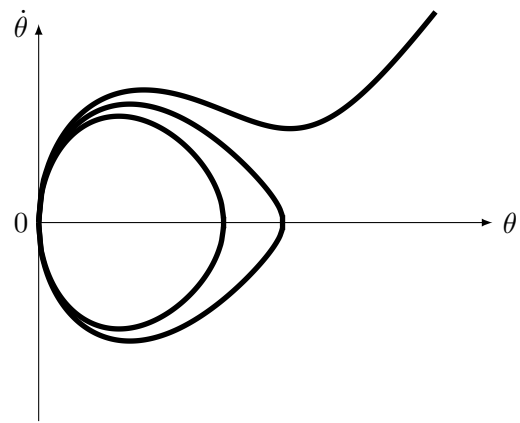


Schéma du pendule

1. Le fil étant inextensible, établir une relation entre R, θ et z si les deux masses sont à la même altitude lorsque $\theta = 0$.
2. En déduire l'expression de l'énergie cinétique E_c du système constitué des deux masses en fonction de $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ et des constantes nécessaires.
De même exprimer l'énergie potentielle du même système E_p uniquement en fonction de θ .
3. Existe-t-il une ou plusieurs position(s) d'équilibre ? Si oui à quelle condition ?
Le cas échéant on notera ces positions θ_i , avec $i = 1, 2, \dots$ et on donnera leur expression.
4. Dans toute la suite on suppose que les conditions sont réunies pour qu'il existe une/des position(s) d'équilibre. Discuter de leur stabilité.
5. Établir l'équation du mouvement, c'est-à-dire l'équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par θ .
6. Développer cette équation au voisinage de chaque position d'équilibre θ_i , dans l'hypothèse de petits mouvements au voisinage de θ_i . Cela confirme-t-il le caractère stable ou instable ? Le cas échéant quelle est la période des petites oscillations au voisinage de θ_i ?
7. Le système est placé dans la position $\theta = 0$ initiale. Les masses sont lâchées sans vitesse initiale à la date $t = 0$. Les figures ci-dessous représentent les énergies potentielles et les trajectoires de phase pour $l = 50$ cm, $R = 5$ cm, $m = 100$ g et pour trois valeurs différentes de la masse M , à savoir $M = 650$ g, 720 g et 800 g.
Reproduire ces schémas qualitativement, en indiquant le sens de parcours sur les portraits de phase. Associer à chaque valeur de M la courbe d'énergie potentielle et la trajectoire de phase correspondantes. On justifiera clairement le raisonnement.
8. Le cas échéant expliquer comment on peut calculer l'amplitude du mouvement oscillatoire, et sa période.



Énergie potentielle



Portraits de phase

II. Modélisation du monoxyde de carbone

Données générales :

Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,0 \times 10^8 \text{m.s}^{-1}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H.m}^{-1}$
Unité de masse atomique	$1 \text{u.m.a} = 1,66 \times 10^{-27} \text{kg}$
Masse atomique du carbone	$m_1 = m(\text{C}) = 12 \text{u.m.a}$
Masse atomique de l'oxygène	$m_2 = m(\text{O}) = 16 \text{u.m.a}$

Données relatives à la molécule CO :

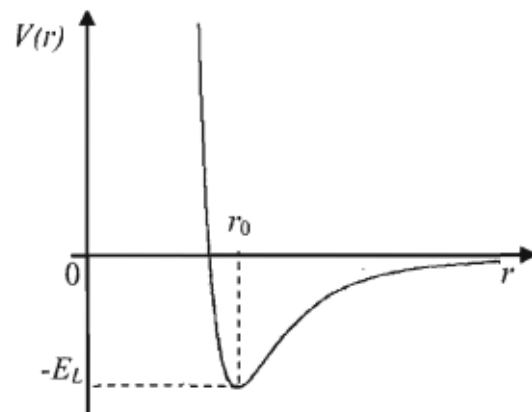
Distance intermoléculaire C-O	$r_0 = 1,13 \times 10^{-10} \text{m}$
Fréquence propre d'élongation	$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 6,425 \times 10^{13} \text{Hz}$

II.1. Modélisation classique des oscillations d'une molécule diatomique

On considère une molécule diatomique électriquement neutre formée des deux atomes (A_1) et (A_2) dont les noyaux sont assimilés à deux points matériels P_1 et P_2 , de masses respectives m_1 et m_2 . On note $\vec{r} = \overrightarrow{P_1 P_2}$ et $r = P_1 P_2$. La molécule est considérée dans son état électronique quantique fondamental. On modélise alors son énergie mécanique totale par

$$E_m = E_c + V(r)$$

où E_c représente l'énergie cinétique des deux noyaux (celle des électrons étant négligeable), et $V(r)$ l'énergie potentielle électrique de la molécule, représentée ci-contre.



Energie potentielle d'une molécule diatomique

On travaille dans le cadre de la mécanique classique. On admet qu'il est équivalent d'étudier la molécule en considérant le noyau P_1 fixe dans un référentiel galiléen et le noyau P_2 mobile, mais à condition d'affecter à ce dernier une *masse réduite* $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$. On néglige les mouvements de rotation propre de la molécule, d'énergies négligeables au regard des *énergies de vibration* associées aux variations de la distance r . On se ramène donc au mouvement rectiligne (angles sphériques θ et φ constants) d'un point matériel de masse m d'énergie potentielle $V(r)$, et d'énergie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 .$$

Pour les applications numériques, les masses m_1 et m_2 correspondent ici aux masses du carbone et de l'oxygène.

1. On note r_0 la valeur de r telle que $V(r)$ est minimale. Pour de faibles variations de r autour de r_0 , justifier qu'il est légitime de poser :

$$V(r) = -E_L + \frac{1}{2}k(r - r_0)^2 \quad (1)$$

en précisant comment la constante k est reliée à la fonction $V(r)$.

2. Quelle est la signification physique de E_L ?
 3. Montrer que dans ces conditions de petites variations, la distance inter-nucléaire $r(t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} + k(r - r_0) = 0 \quad (2)$$

Donner la forme générale de la solution $r(t)$. On notera r_m et ω_0 l'amplitude et la pulsation des oscillations. Donner l'expression de ω_0 .

4. En déduire que dans le cadre de ces petites oscillations, l'énergie mécanique s'écrit

$$E_m = -E_L + \frac{1}{2}m\omega_0^2 r_m^2. \quad (3)$$

La molécule est ici supposée polaire du fait de la dissymétrie du nuage électronique, qui se traduit par une charge $-q$ attachée à P_1 et une charge $+q$ attachée à P_2 . Elle possède alors un moment dipolaire électrique $\vec{p} = q\vec{r}$, qui oscille dans la même direction que \vec{r} avec une amplitude $p_m = qr_m$ et une pulsation ω_0 . Or la théorie du rayonnement dipolaire permet d'établir que cette oscillation va générer un rayonnement électromagnétique dont la *puissance moyenne sur une période* vaut :

$$\langle P_{ray} \rangle = \frac{\mu_0 \omega_0^4 p_m^2}{12\pi c} \quad (4)$$

Ainsi l'énergie E_m de la molécule ne peut être considérée rigoureusement constante. Si elle varie très peu au cours d'une période d'oscillation, de telle sorte que l'on peut utiliser le résultat de l'équation 3, on doit toutefois considérer qu'elle varie lentement en suivant l'équation

$$\frac{dE_m}{dt} = -\langle P_{ray} \rangle. \quad (5)$$

5. En déduire que l'amplitude du mouvement r_m décroît en fait lentement et exponentiellement avec une constante de temps caractéristique τ que l'on exprimera en fonction de m , ω_0 , q et de constantes fondamentales.
 6. Montrer qu'on peut alors prendre en compte phénoménologiquement cet effet de rayonnement par l'ajout d'une force de frottement fluide linéaire $-\alpha \dot{r}$ s'appliquant sur le noyau P_2 . Donner l'expression du coefficient de frottement α en fonction de τ et m .
 7. En utilisant les données numériques fournis en début d'énoncé, ainsi que $q = 3,60 \times 10^{-21} \text{C}$, vérifier numériquement que pour la molécule de monoxyde de carbone CO, cette hypothèse de variation lente est bien vérifiée.

II.2. Modélisation classique de l'absorption dans l'infrarouge

La molécule diatomique polaire étudiée précédemment est maintenant soumise à l'action d'une onde électromagnétique plane progressive et harmonique de pulsation ω (correspondant au domaine de l'infrarouge, donc de fréquence $10^{11} \text{Hz} < f < 10^{14} \text{Hz}$), se propageant selon les x croissants. Le champ électromagnétique de l'onde est décrit par un champ électrique $\vec{E}(x, t) = E(x, t) \vec{u}_z$ et un champ magnétique $\vec{B}(x, t) = B(x, t) \vec{u}_y$.

On admettra que l'onde n'a pas d'effets notoires sur le nuage électronique, de sorte que le modèle obtenu à la fin de la première partie reste valable. On suppose toujours une charge $-q$ attaché à P_1 qu'on suppose toujours fixe dans un référentiel galiléen et une charge $+q$ attachée à P_2 mobile avec une masse réduite $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

Le gaz de molécule dans lequel se propage l'onde électromagnétique est suffisamment dilué pour qu'on puisse considérer que la célérité de l'onde est celle d'une onde électromagnétique dans le vide, notée c .

8. L'onde est-elle polarisée ? Si oui sous quelle forme ?

Rappeler la forme de $E(x, t)$ et $B(x, t)$, en introduisant ω et la longueur d'onde λ .

Montrer que compte tenu des ordres de grandeur en jeu, les champs $\vec{E}(x, t) = E(x, t) \vec{u}_z$ et $\vec{B}(x, t) = B(x, t) \vec{u}_y$ peuvent être considérés uniformes à l'échelle de la molécule.

9. On peut montrer que l'effet du champ magnétique sur le mouvement est négligeable compte-tenu des faibles vitesses en jeu. En déduire que l'élongation $\xi(t) = r(t) - r_0$ vérifie une équation différentielle du mouvement du type :

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{d\xi}{dt} + \omega_0^2 \xi = \frac{q}{m} E_0 \cos \omega t \quad (6)$$

10. On se place en régime sinusoïdal forcé. Déterminer l'expression de l'amplitude complexe de l'élongation ξ_m . Préciser succinctement les comportements fréquentiels haute et basse fréquence et commenter physique le comportement haute fréquence.
11. Déterminer la pulsation pour laquelle l'amplitude du mouvement sera maximale. Comment se simplifie-t-elle aux vues des valeurs numériques données en début d'énoncé et $q = 3,60 \times 10^{-21} \text{C}$?

On cherche maintenant à étudier l'absorption du rayonnement incident en fonction de la fréquence du rayonnement incident, c'est-à-dire la puissance moyenne absorbée par la molécule de CO et provenant de l'onde électromagnétique incidente.

12. Exprimer la puissance instantanée P_{abs} fournie par l'onde à la molécule.

En déduire que la puissance moyenne absorbée par la molécule s'écrit $\langle P_{abs} \rangle = \frac{m}{\tau} \langle \dot{\xi}(t)^2 \rangle$

13. Calculer l'amplitude de la vitesse $\dot{\xi}(t)$, puis en déduire une expression de la puissance moyenne absorbée $\langle P_{abs} \rangle$ en fonction de la pulsation ω .

14. Tracer l'allure de $\langle P_{abs} \rangle(\omega)$.

15. Exprimer la pulsation de résonance associée. Se situe-t-elle dans l'infra-rouge ?

16. On définit la bande passante comme l'ensemble des fréquences telles que $\langle P_{abs} \rangle(\omega) \geq \frac{P_{abs,max}}{2}$. Déterminer la largeur $\Delta\omega$ de la bande passante et estimer la largeur relative $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ avec les valeurs numériques données dans la partie précédente. Commenter cette valeur.

17. En pratique un autre phénomène peut être responsable de l'élargissement de la bande d'absorption, c'est l'effet Doppler dû au mouvement des molécules dans le gaz.

Expliquer succinctement, puis établir l'expression de le décalage relatif de pulsation d'absorption $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ qui serait causé par l'effet Doppler pour une molécule de vitesse v .

18. Pour un gaz à la température T , la largeur de la bande d'absorption qui résulte de l'effet Doppler peut alors être estimée par :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx \frac{k}{c} \sqrt{\frac{RT}{M_{CO}}} \quad (7)$$

où k est un facteur sans dimension (de l'ordre de l'unité), $R = 8,314 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$ est la constante des gaz parfait et $M_{CO} = 28 \text{ g.mol}^{-1}$ la masse molaire du monoxyde de carbone.

Entre l'élargissement par effet Doppler et celui du au freinage par rayonnement, quel effet prédomine à température ambiante ?

19. On place le gaz dans une cavité optique constituée de deux miroirs très réfléchissants distants de $L = 10 \text{ cm}$ (par exemple dans le but de concevoir un LASER Infra-Rouge). Les miroirs ont pour effet d'annuler le champ électrique là où ils sont placés.

En déduire l'espacement en pulsation $\Delta\omega_n$ des modes propres possibles pour les ondes électromagnétiques dans cette cavité.

D'après les questions précédentes, quel est l'ordre de grandeur du nombre de modes propres pouvant être absorbés dans cette cavité ?

* * * FIN DE L'ÉPREUVE * * *