

CB 1 de PHYSIQUE PCSI 1, 2 et 3 CORRECTION

I Acquisition d'images de Jupiter

I.1 OPPOSITIONS DE JUPITER

- Q1.** Le diamètre angulaire α sous lequel est vu Jupiter s'écrit : $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{d_J/2}{d_{TJ}}$ où d_{TJ} est la distance entre la Terre et Jupiter. Cet angle étant faible, on peut écrire directement $\alpha = \frac{d_J}{d_{TJ}}$. L'angle sera maximal lorsque d_{TJ} sera minimale, c'est-à-dire $R_J - R_T$. Ainsi :

$$\alpha_0 = \frac{d_J}{R_J - R_T} = 2,2 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 46''$$

- Q2.** La distance entre la Terre et Jupiter est minimale lorsque la Soleil, la Terre et Jupiter sont alignés, dans cet ordre. Ainsi, vu de la Terre, Jupiter est à l'opposée du Soleil, d'où le terme «opposition» de Jupiter.

Q3. $\omega_T = \frac{2\pi}{T_T}$ et $\omega_J = \frac{2\pi}{T_J}$. Donc $\theta_T = \frac{2\pi}{T_T}t + 0$ et $\theta_J = \frac{2\pi}{T_J}t + 0$.

Q4. $T_J = T_T \left(\frac{R_J}{R_T}\right)^{3/2} = 4,33 \cdot 10^3$ jours.

À $t = 0$ Jupiter est à l'opposition et les angles $\theta_T = \theta_J$. Les oppositions correspondent aux mêmes angles pour la Terre et Jupiter, à 2π près :

$$\theta_T - \theta_J = \frac{2\pi}{T_T}t - \frac{2\pi}{T_J}t = 2k\pi$$

avec k un entier relatif. La première fois que la planète se retrouve à l'opposition $k = \pm 1$, d'où :

$$2\pi \left| \frac{1}{T_T} - \frac{1}{T_J} \right| \tau = 2\pi \Rightarrow \tau = \frac{T_T T_J}{T_J - T_T} = 399 \text{ jours} = 3,45 \cdot 10^7 \text{ s}$$

I.2 PHOTOGRAPHIE DE JUPITER

Q5. $d_c = \sqrt{\ell_c^2 + h_c^2} = 4,49 \text{ mm}$.

Il y a N pixels carrés répartis sur une surface S_c , donc $S_c = N\epsilon_c^2$. Ainsi $\epsilon_c = \sqrt{\frac{S_c}{N}} = 5,60 \mu\text{m}$

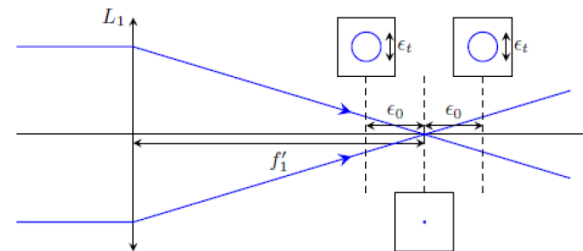
- Q6.** La distance $R_J - R_T = 630 \cdot 10^6 \text{ km}$ à laquelle se situe Jupiter lors de son observation est **très grande devant** $f'_1 = 2,35 \text{ m}$, donc on peut en excellente approximation considérer que Jupiter est située à l'infini.

- Q7.** Le capteur doit se situer dans le plan focal image de L_1 , il doit donc être à la **distance** $f'_1 = 2,35 \text{ m}$ du **centre optique** de (L_1).
Notons L la largeur de l'image de Jupiter sur le capteur. On a $\alpha_0 = \frac{L}{f'_1}$ donc :

$$L = \alpha_0 f'_1 = 5,70 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 102 \epsilon_c$$

L'image occupera 102 pixels.

- Q8.** Quelque soit le sens de décalage du porte-oculaire, on obtient la même tache de largeur ϵ_t . D'après la relation de Thalès, on obtient : $\epsilon_t = \frac{d_1}{f'_1} \epsilon_0$.



- Q9.** La non-punctualité ne se remarquera pas si elle ne dépasse pas un pixel, c'est-à-dire si $\epsilon_t < \epsilon_c$. Ainsi :

$$\epsilon_0 < \frac{f'_1}{d_1} \epsilon_c = \epsilon_{max} = 56,0 \mu\text{m}$$

I.3 LUNETTE ASTRONOMIQUE À LENTILLE DE BARLOW

- Q10.** L'image intermédiaire de Jupiter (qui est à l'infini) se situe dans le plan focal image de (L_1) et son image par (L_2) doit se former sur le capteur. Le grandissement réalisé par la lentille (L_2) doit valoir $\gamma_2 = 3$. Ainsi, en notant O_2 le centre optique de (L_2) :

$$\gamma_2 = 3 = \frac{D_{2c}}{O_2 F'_1} = \frac{D_{2c}}{f'_1 - D_{12}} \Rightarrow D_{12} = f'_1 - \frac{D_{2c}}{\gamma_2} = 2,28 \text{ m}$$

- Q11.** D'après la relation de conjugaison de Descartes pour (L_2) :

$$\frac{1}{D_{2c}} - \frac{1}{f'_1 - D_{12}} = \frac{1}{f'_2} = \frac{1}{D_{2c}} - \frac{\gamma_2}{D_{2c}}$$

Ainsi :

$$f'_2 = \frac{D_{2c}}{1 - \gamma_2} = -100 \text{ mm} < 0$$

Rq : La lentille (L_2) étant divergente, on doit bien trouver une distance focale négative.

- Q12.** Avec une seule lentille, la taille L' de l'image formée sur le capteur (correctement positionné, c'est-à-dire dans le plan focal image) est : $L' = \alpha_0 f'_1$. Or on veut $L' = 3L$ avec $L = \alpha_0 f'_1$ la taille de l'image donnée par (L_2). Ainsi, $f'_1 = 3f'_1$. La focale est triplée par l'ajout de la lentille de Barlow, d'où la nom de «tripleur de focales».

I.4 EFFETS DE LA DIFFRACTION

- Q13.** La diffraction à travers L_1 conduit à un élargissement du faisceau sur un angle $2\theta_d$ avec $\theta_d \simeq \frac{\lambda}{d_1}$. Sans la lentille L_2 , on obtiendrait sur le capteur, situé à f'_1 de la lentille L_1 , une tache de dimension $2f'_1 \theta_d$.
La lentille L_2 agrandit les images d'un facteur $\gamma_2 = 3$, d'où :

$$\epsilon_d \simeq 2\gamma_2 f'_1 \frac{\lambda}{d_1}$$

Pour $\lambda = 500 \text{ nm}$, on obtient $\epsilon_d = 30 \mu\text{m} \simeq 6\epsilon_c$.

L'élargissement dû à la diffraction occuperait environ 6 pixels, ce qui affectera l'image dont la dimension était de 102 pixels en négligeant la diffraction.

II Récupération d'énergie

II.1 ETUDE DU " MIROIR INFINI "

- Q14. L'image d'un point A par le système est un point A' , c'est-à-dire que tout rayon lumineux, sans restriction, issu de A émerge en direction de A' après être passé par le système optique.
- Q15. On obtient A_1 et A'_1 par symétrie par rapport aux miroirs.

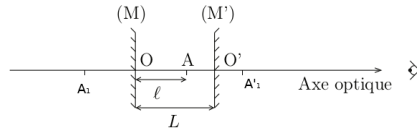


FIGURE 1 - Images par les miroirs

- Q16. En utilisant les relations de conjugaison du miroir plan :

$$\begin{aligned} \overline{OA_1} &= -\overline{OA} = -l \\ \overline{OA'_1} &= \overline{OO'} - \overline{O'A} = L - (-L + l) = 2L - l \end{aligned}$$

- Q17. La distance entre deux points successifs s'écrit si n est impair :

$$\begin{aligned} d_n &= A_n A_{n+1} = |l - (n+1)L - (-l - (n-1)L)| \\ &= |2l - 2L| \\ &= 2(L - l) \end{aligned}$$

et si n est pair :

$$\begin{aligned} d_n &= A_n A_{n+1} = |-l - (n)L - (l - nL)| \\ &= |-2l| \\ &= 2l \end{aligned}$$

L'égalité de toutes les distances impose l'égalité des deux distances précédentes, soit $2L - 2l = 2l$ soit $l = L/2$. La distance deux images vaut alors L .

- Q18. Le miroir sans tain laisse sortir un peu de lumière à chaque réflexion (sinon, on ne verrait rien !), le faisceau réfléchi suivant sera donc de plus faible amplitude : la luminosité des images diminue quand n augmente.

II.2 MODELISATION DE LA CONVERSION D'ENERGIE

II.2.1 Mouvement de la dalle : mise en équation

- Q19. $\vec{F}_r = -k(x - l_0)\vec{e}_x$

- Q20. Le référentiel terrestre étant supposé galiléen, la somme des forces appliquées sur la dalle est nulle à l'équilibre TRD. Il vient : $\vec{P} + \vec{f} + \vec{F}_r = \vec{0}$ soit $-mg - k(x_{eq} - l_0) = 0$ soit :

$$x_{eq} = l_0 - \frac{mg}{k}$$

On attend une grandeur homogène à une distance, ce qui est le cas de l_0 . Le rapport $\frac{mg}{k}$ est une force (mg) divisée par une raideur (homogène à des N/m), il s'agit donc bien d'une grandeur homogène à une distance.

On remarque que le ressort est comprimé à l'équilibre, ce qui logique puisque la dalle pèse sur le ressort.

- Q21. On applique à nouveau le TRD sur le système { dalle+danseur } à l'équilibre dans \mathfrak{R} . On obtient cette fois :

$$x'_{eq} = l_0 - \frac{mg + Mg}{k} \implies \delta = \frac{Mg}{k}$$

- Q22. On veut $\delta \approx 1\text{mm}$. Le poids d'un danseur est de l'ordre de 70kg. Il vient :

$$k \sim \frac{Mg}{\delta} = 7 \times 10^4 \text{N.m}^{-1} \quad (1)$$

- Q23. Appliquons le TRD au système dalle dans le référentiel terrestre :

$$\begin{aligned} m\vec{a}_{dalle} &= \vec{P} + \vec{f} + \vec{F}_r + \vec{F} + \vec{F}_\alpha \\ \implies m\ddot{x} &= -mg - D\dot{x} - \alpha\dot{x} - k(x - l_0) + F \\ \implies \ddot{X} + \frac{D + \alpha}{m}\dot{X} + \frac{k}{m}X &= \frac{F - kx_{eq} - mg + kl_0}{m} \\ \implies \ddot{X} + \frac{D + \alpha}{m}\dot{X} + \frac{k}{m}X &= \frac{F}{m} \end{aligned}$$

donc $a_0 = \frac{k}{m}$ et $b_0 = \frac{F}{m}$

- Q24. Le système est linéaire puisqu'il est régi par une équation différentielle linéaire et il est stable puisque tous les coefficients de l'équation homogène sont de même signes.

II.2.2 Puissance électrique reçue par les LED

- Q25. $Z_R = R; Z_L = jL\omega$

- Q26. On peut considérer que le danseur a une fréquence de pas de l'ordre du Hz (1 pas par seconde) soit une pulsation $\omega = 2\pi f = 6\text{rad.s}^{-1}$.

- Q27. $\frac{L\omega}{R} = \frac{10^{-2}}{10} \approx 10^{-3} \ll 1$: l'impédance de la bobine est effectivement négligeable devant l'impédance de la résistance.

- Q28. Les impédances R et R_L forment un pont diviseur de tension, donc :

$$v = \frac{R_L}{R + R_L}u \quad (2)$$

- Q29. $P_L(t) = \frac{v^2}{R_L}$ soit :

$$P_L(t) = \frac{R_L}{(R + R_L)^2} [K_t \gamma \dot{x}]^2 \quad (3)$$

- Q30. On utilise l'intensité circulant dans le circuit : $i = \frac{u}{R + R_L}$ et $u = K_t \gamma \dot{x}$ donc :

$$\begin{aligned} P_u(t) &= u \times i = \frac{1}{R + R_L} [K_t \gamma \dot{x}]^2 \\ P_p(t) &= \frac{P_u(t)}{\eta} = \frac{1}{\eta(R_L + R)} [K_t \gamma \dot{x}]^2 \end{aligned}$$

- Q31. La puissance fournie à la dalle mobile par l'intermédiaire de \vec{F}_α est $-P_p(t)$ soit : $F_\alpha v = -P_p$ en posant $\vec{F}_\alpha = F_\alpha \vec{e}_x$. Il vient :

$$F_\alpha = -\frac{P_p}{v} = \frac{(K_t \gamma)^2}{\eta(R + R_L)} v \quad (4)$$

d'où le coefficient α proposé.

- Q32. $\alpha = 3.0 \times 10^4 \text{kg.s}^{-1}$ Le coefficient D est largement négligeable devant α .

II.2.3 Alimentation électrique des LED

Q33. $v = u$

Q34. $v = -u$

Q35. Le pont de diode permet de redresser la tension pour obtenir une tension toujours positives.

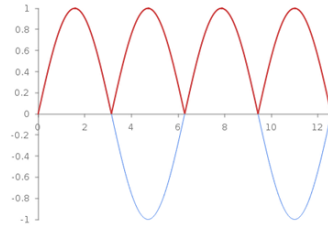


FIGURE 2 – Tensions u (trait fin bleu) et v (trait épais rouge). Les valeurs numériques sont arbitraires.

Q36. cf. 3. Le signal $v(t)$ est périodique de fréquence f_0 . Il vient que son spectre ne peut contenir que de fréquences qui sont des multiples entiers de f_0 . Les diodes sont des dipôles non linéaires et un circuit non linéaire peut entraîner l'ajout de composantes spectrales.

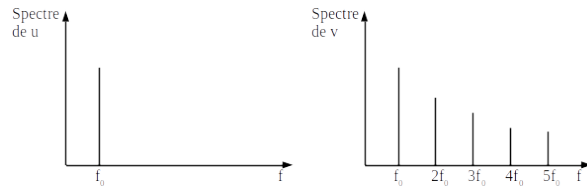


FIGURE 3 – Spectres de u et v

Q37. La luminosité va varier entrainer un effet de clignotement gênant voire dangereux.

Q38. De $i = C \frac{dv}{dt}$, il vient que la capacitance est homogène a des $\frac{s}{\Omega}$. Il vient que $R_L^\alpha C^\beta$ a pour unité : $s^\beta \Omega^{\alpha-\beta}$. Les secondes et les Ohm étant des unités indépendantes, il vient que $\beta = 1$ et $\alpha = \beta = 1$.

Q39. On veut $R_L C \gg T = \frac{1}{f}$ avec $f = 1\text{Hz}$. Il vient $C \gg \frac{T}{R_L} = 7.10^{-3} F$. Il faut donc une capacitance de l'ordre de quelques dixièmes de Farad. C'est une valeur de capacité très grande qui n'est pas réalisable avec une boîte à décade utilisée en Travaux Pratiques.

II.3 SIMULATIONS, OPTIMISATION DES PARAMETRES

II.3.1 Réponse indicelle

Q40. ω_0 est la pulsation propre et est dimensionnellement l'inverse d'un temps (elle s'exprime en rad.s^{-1} en unité SI). Lorsque l'amortissement devient négligeable, le système tend à osciller à cette pulsation. Q est le facteur de qualité et est sans dimension, il informe sur l'amortissement du système : plus Q est grand, plus l'amortissement est faible.

Q41. (Le système est stable, il tend vers une valeur constante X_{eq}). On introduit cette solution dans l'équation différentielle, il vient :

$$X_{eq} = \frac{F_0}{k} \tag{5}$$

Q42. On observe une somme d'exponentielle réelles, le régime est apériodique. Le facteur de qualité vaut : $Q = 7 \times 10^{-2} < 1/2$. On attend bien un régime apériodique.

$$X(t=0) = X_{eq} \left[1 - \frac{1}{1-Q^2} (1-Q^2) \right] = 0$$

$$\dot{X}(t=0) = X_{eq} \frac{1}{1-Q^2} \left(-\omega_0 Q + Q^2 \frac{\omega_0}{Q} \right) = 0$$

Les conditions initiales sont bien vérifiées.

Q43. Il vient :

$$\dot{x}(t) = \dot{X}(t) = X_{eq} \frac{\omega_0 Q}{1-Q^2} \left(e^{-\frac{\omega_0}{Q}t} - e^{-\omega_0 Q t} \right) \tag{6}$$

Q44. En utilisant les relations précédentes, il vient :

$$P_L(t) = A [K_t \gamma]^2 \frac{F_0^2}{k^2} \left(\frac{\omega_0 Q}{1-Q^2} \right)^2 \left(e^{-\frac{\omega_0}{Q}t} - e^{-\omega_0 Q t} \right)^2 \tag{7}$$

soit l'expression demandée avec $K = A [K_t \gamma]^2 \frac{1}{k^2} \left(\frac{\omega_0 Q}{1-Q^2} \right)^2$

On aurait pu raisonner par proportionnalité entre les grandeurs.

Q45. Les temps caractéristiques de chaque exponentielle sont $\tau_1 = \frac{1}{\omega_0 Q}$ et $\tau_2 = \frac{Q}{\omega_0}$. On a observé que la valeur de Q est très faible, donc le temps caractéristique τ_1 est grand devant le temps τ_2 .

L'exponentielle $e^{-\frac{\omega_0}{Q}t}$ convergera donc beaucoup plus vite vers 0.

Aux t temps longs, $P_L(t) \approx K F_0^2 e^{-2\omega_0 Q t}$. Elle décroît donc de manière exponentielle avec un temps caractéristique $\tau = 2\tau_1 = \frac{1}{2\omega_0 Q}$.

Q46. Trait plein : F_0 ; Pointillés : P_L

Q47. Le commentaire est en cohérence. A cause de l'amortissement, on tend vers un équilibre soit une vitesse nulle. La puissance transmise mécanique tend alors aussi vers 0.

On peut aussi se baser sur l'expression temporelle trouvée précédemment.

Q48. On n'utilise pas le premier tracé dont l'allure s'écarte d'une exponentielle. Pour les autres, le temps caractéristique est a peu près toujours le même et vaut environ $\tau = 0.2s$.

L'expression de τ trouvée précédemment donne ($\omega_0 = \sqrt{k/m} = 65\text{rad.s}^{-1}$) : $\tau \approx 0.1s$. Vu la mesure approximative sur le graphique, on peut considérer que ces deux valeurs sont cohérentes.

II.3.2 Forçage sinusoïdal

$$\text{Q49. } F_0 = 1000\text{N}; F_1 = 900\text{N}; \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.34} = 20\text{rad.s}^{-1}$$

Q50. Avec le grandeurs complexes, l'équation devient $(-\omega^2 + i\frac{\omega_0 \omega}{Q} + \omega_0^2) \underline{X} = \frac{F_1}{m} e^{i(\omega t + \varphi)}$ donc :

$$\underline{X} = \frac{F_1/m}{-\omega^2 + i\frac{\omega_0 \omega}{Q} + \omega_0^2} e^{i(\omega t + \varphi)}$$

donc :

$$X_0 = |\underline{X}| = \frac{F_1/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_0 \omega}{Q}\right)^2}} \tag{8}$$

Q51. De $\underline{V} = i\omega \underline{X}$, il vient :

$$V_0 = |i\omega \underline{X}| = \frac{\omega F_1/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_0 \omega}{Q}\right)^2}} \tag{9}$$

Q52. La puissance moyenne reçue par les LED tend vers 0 à haute et basse fréquence : à basse fréquence, l'absence de vitesse implique une absence de transfert de puissance et à haute fréquence, l'inertie de la dalle implique qu'elle ne bouge presque pas.

Le numérateur étant constant, la puissance sera maximale lorsque $\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$ sera nul soit pour

$\omega = \omega_0 = 65\text{rad.s}^{-1}$. La puissance maximale vaut alors :

$$\langle P_L \rangle_{\max} = \frac{\eta^2 F_1^2 R_L}{2K_f^2 \gamma^2} \quad (10)$$

cf. Figure 4 pour le tracé.

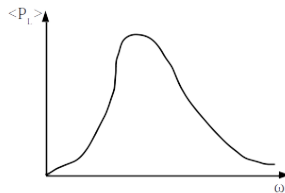


FIGURE 4 – Puissance moyenne en fonction de la pulsation

Q53. Pour l'équipe 1, la pulsation d'excitation est $\omega_1 = 12\text{rad.s}^{-1}$. Pour l'équipe 2, la pulsation d'excitation est $\omega_2 = 13\text{rad.s}^{-1}$ soit $\omega_1 < \omega_2 < \omega_0$; l'équipe 2 produit plus d'énergie.