ÉLECTRICITÉ

I. Etude d'un électrolyseur

1. **Dipôle passif :** la caractéristique statique passe par l'origine ($i = 0$ et $u = 0$).

   Dipôle symétrique : la caractéristique statique est impaire, donc les deux pôles peuvent être permutés sans effet sur l'état du circuit.

   Dipôle linéaire : la caractéristique statique est une droite, et la relation courant tension est une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

   L'électrolyseur est donc **un dipôle passif, symétrique, et non linéaire**.

2. **a)** D'après le graphe, l'intensité I est nulle dans le régime 2 quelle que soit la tension (dans le domaine $[-E_1, E_1]$). On peut donc remplacer le dipôle par un interrupteur ouvert, c'est-à-dire le supprimer.

   b) On est ramené à une circuit de type pont de Wheatstone. On décompose U en passant par A (ou B) : $U = V_M - V_A + V_A - V_N$. L'application de la formule du pont diviseur de tension dans chaque branche entre A et B conduit alors à $U = xE - (1-x)E$, donc $\boxed{U = (2x-1)\,E}$.

   c) D'après le graphe, le régime 2 existe sous la double condition $-E_1 \leq U \geq E_1$. Ceci équivaut donc à $-E_1 \leq (2x-1)\,E \geq E_1$. Comme $E \geq 0$, on obtient la condition nécessaire et suffisante $\boxed{\frac{1}{2}\left(1-\frac{E_1}{E}\right) \leq x \leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{E_1}{E}\right)}$, c'est-à-dire $\underline{0,25 < x < 0,75}$.

3. **a)** D'après le graphe, dans le régime 3 la caractéristique est une demi-droite d'équation $I = \frac{U-E_1}{R_1} \Longleftrightarrow \boxed{U = R_1 I + E_1}$. Cette relation est cohérente avec le schéma équivalent proposé.

   b) *Première méthode :* On applique la loi des noeuds en termes de potentiel, qui combine loi des noeuds et loi d'Ohm : on exprime d'abord $U = V_M - V_N$ en fonction de I, puis on impose $U = R_1 I + E_1$ ce qui détermine I.
   Par commodité, on impose une masse au point A, donc $V_A = 0$ et $V_B = E$. La loi des noeuds en termes de potentiel conduit alors en M à $I = -\frac{V_M}{xR} + \frac{E-V_M}{(1-x)R} \Longleftrightarrow V_M = xE - x(1-x)RI$, et en N à $I = \frac{V_N}{(1-x)R} + \frac{V_N - E}{xR} \Longleftrightarrow V_N = (1-x)E + x(1-x)RI$. Ceci mène à $U = V_M - V_N = (2x-1)E - 2x(1-x)RI$. En imposant par ailleurs que $U = R_1 I + E_1$, on en déduit

$$\boxed{I = \frac{\alpha E + \beta E_1}{\gamma R_1 + \delta R}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\alpha = 2x-1 \quad , \quad \beta = -1 \quad , \quad \gamma = 1 \quad \text{et} \quad \delta = 2x(1-x)}.$$

   c) D'après le graphe, le régime 3 correspond à $I > 0 \Longleftrightarrow (2x-1)E - E_1 > 0 \Leftrightarrow \boxed{x > \frac{1}{2}\left(1+\frac{E_1}{E}\right)} = \underline{0,75}$.

4. **a)** D'après le graphe, dans le régime 1 la caractéristique est une demi-droite d'équation $I = \frac{U+E_1}{R_1} \Leftrightarrow \boxed{U = R_1 I - E_1}$. Cette relation est cohérente avec le schéma équivalent proposé.

   b) Le calcul de $I(x)$ est en tout point identique au précédent, mis-à-part le fait que la source E_1 a été retournée. Donc il suffit de changer E_1 en $-E_1$ dans le résultat, ce qui conduit à $\boxed{I = \frac{\alpha E - \beta E_1}{\gamma R_1 + \delta R}}$.
   De même que précédemment, la condition d'existence du régime 1 est $I < 0$ et conduit bien à $\boxed{x < \frac{1}{2}\left(1-\frac{E_1}{E}\right)} = \underline{0,25}$.

II. Champ mégagauss

1. Avant le basculement de K de la position 2 vers 1, le condensateur est chargé et le régime est stationnaire. Donc le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert et le courant y est nul (aussi dans la branche de droite qui est de fait ouverte). Par conséquent **la tension sur les résistances est nulle** et $\boxed{u_c = E}$. **Aux bornes de la bobine la tension est aussi nulle** car le courant l'est.

2. On note i_c le courant rentrant dans le condensateur en convention récepteur par rapport à la tension u_c. On a donc la puissance reçue par le condensateur

$$\mathcal{P}_{r\,C} = u_c.i_c = C.u_c.\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\xi_e}{\mathrm{d}t} \quad \text{avec} \quad \xi_e = \frac{1}{2}Cu_c^2$$

   l'énergie électrique contenue dans le condensateur. L'énergie reçue par le condensateur entre le début et la fin de la charge est donc

$$W_{r\,C} = \int_0^{\infty} \mathcal{P}_{r\,C}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}Cu_c^2\right]_0^{\infty} = \left[\frac{1}{2}Cu_c^2(\infty) - \frac{1}{2}Cu_c^2(0)\right] \quad \text{d'où} \quad \boxed{W_{r\,C} = \frac{1}{2}CE^2} = \underline{54\,\mathrm{kJ}}.$$

3. Le courant est maintenant nul dans la branche de gauche. La loi des mailles de la maille de droite s'écrit

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + ri - u_c = 0 \quad \text{pour tout} \quad t > 0\,.$$

   Comme $i = -C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$, on dérive cette équation et on la multiplie par $\frac{1}{L}$, ce qui donne :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{r}{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}i = 0}.$$

4. On peut alors poser $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} = \underline{9,1 \times 10^5\,\mathrm{rad.s^{-1}}}$ et $\boxed{Q = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{L}{C}}} = \underline{0,91}$.

5. Le courant i doit évoluer continûment à cause de la bobine, or il est nul à $t = 0^-$ car l'interrupteur était en position 2 donc la branche ouverte. Donc $\boxed{i(0^+) = i(0) = 0}$.
   On note u_L la tension aux bornes de la bobine en convention récepteur par rapport au courant. Par la loi des mailles et en utilisant la continuité de la tension aux bornes du condensateur, on obtient

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = u_L(0^+) = u_C(0^+) - ri(0^+) = E - 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{E}{L}}.$$

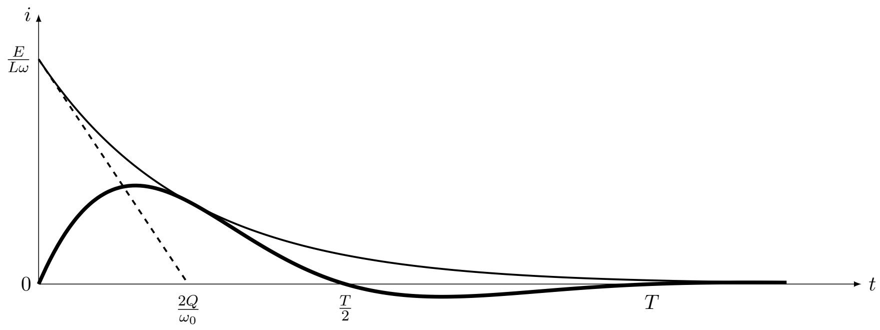
6. Le discriminant de l'équation caractéristique $x^2 + \frac{\omega_0}{Q}x + \omega_0^2 = 0$ est $\Delta = 4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right) < 0$ car $Q > \frac{1}{2}$. La solution générale s'écrit donc (pas de solution particulière car pas de second membre) :

$$i(t) = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right) \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \quad \text{, pour tout} \quad t > 0\,.$$

   L'application des conditions initiales permet de trouver les constantes A et B :

$$i(0^+) = 0 = A \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{E}{L} = B\omega \quad \text{d'où} \quad \boxed{i(t) = \frac{E}{L\omega}e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\sin(\omega t)}.$$

7. On représente ci-dessous le courant $i(t)$ en trait épais, et l'enveloppe exponentielle supérieure $\frac{E}{L\omega}e^{-\frac{\omega t}{2Q}}$ en trait fin. La première annulation a lieu à l'instant $\frac{T}{2}$, puis à l'instant T, avec $T = \frac{2\pi}{\omega}$ la pseudo-période.



8. Par proportionnalité, le champ magnétique suit le même profil temporel que le courant. Le temps caractéristique de décroissance de l'enveloppe exponentielle est $\boxed{\tau = \frac{2Q}{\omega_0}} = \underline{2,0\,\mu\text{s}}$, qui est (comme on peut le voir ci-dessus) un bon ordre de grandeur de la durée de vie du champ magnétique.

9. Au départ on a stocké une énergie électrique $\mathcal{E}_e = \frac{1}{2}CE^2$ dans le condensateur. L'énergie magnétique stockée dans la bobine vaut $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}Li^2$. Si tout est converti on obtient

$$\frac{1}{2}Li_{\max}^2 = \frac{1}{2}CE^2 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{i_{\max} = \sqrt{\frac{C}{L}}\,E} = \underline{3,3\times 10^6\,\text{A}} \quad \text{et} \quad \boxed{i_{\max} = \frac{\mu_0}{D}\sqrt{\frac{C}{L}}\,E} = \underline{2,0\times 10^2\,\text{T}}\,.$$

10. Lors de la décharge, une partie de l'énergie stockée est perdue (dissipée) par effet Joule dans la résistance r. On ne peut donc pas transférer l'intégralité de l'énergie dans la bobine, ce qui aboutit à un courant maximal inférieur.

11. *Attention erreur d'énoncé !... il fallait lire « bloquée » et non « passante », sinon il n'y a plus aucun rapport avec la première partie de l'énoncé.*

Première méthode :

Comme $i = -C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$, on intègre l'expression précédente :

$$\begin{aligned}
u_c(t) - u_c(0) &= \int_0^t \frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(t')\,\mathrm{d}t' = -\frac{1}{C}\int_0^t i(t')\mathrm{d}t' = -\frac{E}{LC\omega}\int_0^t e^{-\frac{t'}{\tau}}\sin(\omega t')\mathrm{d}t' \\
&= -\frac{E}{LC\omega}\frac{1}{2j}\int_0^t e^{-\frac{t'}{\tau}}\left(e^{j\omega t'} - e^{-j\omega t'}\right)\mathrm{d}t' = -\frac{E}{LC\omega}\frac{1}{2j}\left(\frac{e^{(-\frac{1}{\tau}+j\omega)t}-1}{-\frac{1}{\tau}+j\omega} - \frac{e^{(-\frac{1}{\tau}-j\omega)t}-1}{-\frac{1}{\tau}-j\omega}\right) \\
&= -\frac{E}{LC\omega(\frac{1}{\tau^2}+\omega^2)}\frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{2j}\left((e^{j\omega t}-1)(-\frac{1}{\tau}-j\omega) - (e^{-j\omega t}-1)(-\frac{1}{\tau}+j\omega)\right) \\
&= -\frac{E}{LC\omega(\frac{1}{\tau^2}+\omega^2)}\frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{2j}\left(-\frac{1}{\tau}2j\sin(\omega t) - 2j\omega\cos(\omega t) + 2j\omega\right)
\end{aligned}$$

Comme $u_c(0) = E$ et $\frac{1}{\tau^2} + \omega^2 = \omega_0^2$, on obtient finalement

$$\boxed{u_c(t) = E\,e^{-\frac{t}{\tau}}\left(\frac{1}{\omega\tau}\sin(\omega t) + \cos(\omega t)\right) = \frac{E\omega_0^2}{\omega^2}\,e^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega t + \varphi)} \quad \text{avec} \quad \boxed{\varphi = -\arctan(\tau\omega)}\,.$$

Seconde méthode (plus rapide et moins risquée...) :

On établit l'équation différentielle vérifiée par u_c, à savoir $\ddot{u}_c + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u}_c + \omega_0^2 u_c = 0$ (cf cours). Puis on la résout directement, ce qui donne $u_c(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}\,(A'\cos(\omega t) + B'\sin(\omega t))$ avec les conditions initiales suivantes :

$$u_c(0) = E = A' \quad \text{et} \quad \dot{u}_c(0^+) = -\frac{1}{C}\,i(0) = 0 = -\frac{A'}{\tau} + B'\omega \Rightarrow B' = \frac{E}{\tau\omega}\,,$$

ce qui conduit à la même expression que ci-dessus.

12. On obtient $\cos(\omega t_0 + \varphi) = 0 \Leftrightarrow \omega t_0 + \varphi = \frac{\pi}{2}$ d'où $\boxed{t_0 = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{2} + \arctan(\tau\omega)\right)}$ avec $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = 7,6\times 10^5\,\text{rad.s}^{-1}$, d'où $\underline{t_0 = 3,4\,\mu\text{s}}$.

13. La tension u_c ne peut continuer à décroître selon l'expression précédente car la diode devient passante et assimilable à un fil. Le condensateur est alors court-circuité et $u_c(t) = 0$ pour tout $t \geq t_0$. On peut s'en convaincre par l'absurde : le courant i est nécessairement positif (à cause de la diode). Supposons qu'à un instant ultérieur la diode redevienne bloquée, alors le courant doit circuler dans le condensateur qui est à cet instant de charge nulle. Donc comme $\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = -\frac{i}{C} < 0$, u_c va décroître et devenir négative immédiatement, donc la diode va repasser immédiatement en mode passant.

Ainsi le courant évolue définitivement dans un circuit r-L série, vérifiant l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \tau_L i = 0 \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau_L = \frac{L}{r}} \quad \text{pour tout} \quad t \geq t_0\,.$$

L'expression trouvée en **6.** permet d'écrire la condition initiale, par continuité du courant dans la bobine :

$$\boxed{i(t_0) = \frac{E}{L\omega}\,e^{-\frac{\omega_0 t_0}{2Q}}\cos(\varphi)} \quad \text{car} \quad \omega t_0 = \frac{\pi}{2} - \varphi\,.$$

Et la solution s'écrit alors $\boxed{i(t) = i(t_0)\,e^{-\frac{t-t_0}{\tau_L}}}$.

14. On cherche τ' vérifiant

$$i(t_0 + \tau') = \frac{i(t_0)}{10} \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\frac{\tau'}{\tau_L}} = \frac{1}{10} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\tau' = \tau_L\,\ln 10} = \underline{2,3\,\mu\text{s}}\,.$$