

# MÉCANIQUE ET OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

## I. Dénivellation d'une voie ferrée

- Le train subit son poids  $m\vec{g}$ , la réaction du support  $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$  en notant  $\vec{N} = N_r \vec{u}_r + N_z \vec{u}_z$  et  $\vec{T} = T \vec{u}_\theta$ , et la force globale de frottement  $\vec{F}$ . Dans la configuration recherchée,  $\vec{N}$  est orthogonale au plan de la voie ferrée.
- Le mouvement étant circulaire horizontal de rayon  $\rho$ , on a  $\vec{a} = -\rho\dot{\theta}^2 \vec{u}_r + \rho\ddot{\theta} \vec{u}_\theta$ . Le mouvement étant uniforme alors  $\ddot{\theta} = 0$ , et sa vitesse est  $v = \rho\dot{\theta}$ .

$$\text{On a donc } \boxed{\vec{a} = -\frac{v^2}{\rho} \vec{u}_r}.$$

- Le référentiel étant galiléen, on applique le théorème de la résultante cinétique au système train :

$$m\vec{a} = -mg\vec{u}_z + N_r \vec{u}_r + N_z \vec{u}_z + T \vec{u}_\theta + F \vec{u}_\theta$$

Par projection selon  $\vec{u}_\theta$  on trouve  $T = -F$ . Le moteur compense les frottements, ce qui ne nous intéresse pas ici.

$$\text{On projette selon } \vec{u}_r : \boxed{N_r = -m\frac{v^2}{\rho}}. \text{ On projette selon } \vec{u}_z : \boxed{N_z = mg}.$$

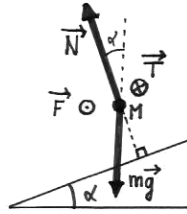
- La condition géométrique imposée à  $\vec{N}$ , qui doit être orthogonale à la voie, se traduit par

$$\frac{|N_r|}{N_z} = \tan \alpha.$$

Toutefois on veut extraire  $h$  donc il est préférable de travailler directement sur

$$\sin \alpha = \frac{h}{d} = \frac{|N_r|}{\sqrt{N_r^2 + N_z^2}} = \left(1 + \frac{N_z^2}{N_r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{avec} \quad \frac{N_z}{N_r} = -\frac{g\rho}{v^2} \quad \text{d'où} \quad \boxed{h = d \left(1 + \frac{g^2 \rho^2}{v^4}\right)^{-\frac{1}{2}}}.$$

On constate bien que plus le rayon de courbure est petit (virage serré) ou plus la vitesse est grande, plus il faut relever la voie, ce qui est conforme à l'expérience courante (notamment en voiture pour éviter les tonneaux).



## II. Microscope

### II.1. Puissance et pouvoir séparateur

- Dans les conditions de Gauss, les rayons sont *paraxiaux*, c'est-à-dire peu inclinés par rapport à l'axe optique et de point d'incidence sur le système optique.
  - Un objet ponctuel est le lieu de convergence des supports des rayons incidents sur le système optique, lorsque ce lieu est un point (réel ou virtuel).
  - Une image est le lieu de convergence des supports des rayons émergent du système optique.
  - Un instrument stigmatique est tel que tout objet ponctuel admet une image ponctuelle.
  - Une lentille mince n'est pas rigoureusement stigmatique, mais elle l'est de façon approchée dans les conditions de Gauss.
- Un œil emmétrope a son punctum remotum à l'infini, donc voit sans effort d'accommodation à l'infini. Pour cette raison on **place  $A_1$  en  $F_2$  de sorte que son image soit à l'infini**.
  - Une image est **réelle** si les rayons qui la forment passent effectivement en ce point. Elle est **virtuelle** si seuls les supports des rayons y passent, mais pas les rayons eux-mêmes.  $A_1$  étant du côté des rayons émergent de  $\mathcal{L}_1$ , il s'agit d'une **image réelle par  $\mathcal{L}_1$** .
  - cf cours. On obtient la relation de conjugaison  $\boxed{\overline{F_1 A_0} \cdot \overline{F_1' A_1} = -f_1'^2}$  et de grandissement transversal

$$\gamma = \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{A_0 B_0}} = \frac{f_1'}{F_1 A_0} = -\frac{\overline{F_1' A_1}}{f_1'}.$$

- D'après l'énoncé  $\overline{F_1' A_1} = \overline{F_1' F_2} = \Delta$ . La conjugaison donne donc  $\boxed{\overline{F_1 A_0} = -\frac{f_1'^2}{\Delta}}$ .

- L'objet  $B_0$  est obtenue par l'intersection d'au moins deux rayons remarquables convergeant en  $B_1$  : i) un rayon passant par le centre optique n'est pas dévié, ii) un rayon passant par le foyer objet émerge parallèle à l'axe optique, iii) un rayon incident parallèle à l'axe émerge en passant par le foyer image.

L'objet  $A_0$  est obtenu par aplanétisme en projetant  $B_0$  orthogonalement à l'axe  $\Delta$ . cf figure ci-dessous.

- En considérant les carreaux de taille 1 cm x 1 cm, la figure conduit à  $\overline{F_1 A_0} = -1,0$  cm.

La relation de conjugaison donne, pour  $f_1' = 2,0$  cm et  $\Delta = 4,0$  cm :  $\boxed{\overline{F_1 A_0} = -\frac{f_1'^2}{\Delta}} = -1,0$  cm, ce qui est en accord avec la construction.

- Comme  $\overline{F_1' A_1} = \overline{F_1' F_2} = \Delta$  on obtient  $\boxed{\gamma_{ob} = -\frac{\Delta}{f_1'}}$ .

- D'après la construction (rayon 2 issu de  $A_0$  passant par  $F_1$ , ou rayon 4 de support  $(B_1 O_2)$  en vert), l'angle  $\alpha'$  vérifie  $\tan \alpha' = \frac{\overline{A_1 B_1}}{f_2}$ , avec  $\tan \alpha' \approx \alpha'$  dans les conditions de Gauss. En introduisant  $\gamma_{ob}$  on obtient

$$P = \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{A_0 B_0} \cdot f_2'} = \frac{\gamma_{ob}}{f_2'} \quad \text{d'où} \quad \boxed{P = -\frac{\Delta}{f_1' \cdot f_2'}} = \underline{900 \delta}.$$

- En utilisant la puissance on obtient  $\boxed{D = \frac{\beta}{P}} \approx 0,5 \mu\text{m}$  en prenant  $\beta \approx 5 \cdot 10^{-4}$  rad. Le microscope permet donc d'observer **des détails de l'ordre du micron**, ce qui est utile pour la biologie (cellules, bactéries).

### II.2. Latitude de mise au point

- L'observateur myope souhaite rapprocher l'image finale, qui doit donc devenir virtuelle car  $\overline{O_2 A_2} < 0$ . La relation de Newton  $\overline{F_2 A_1} \cdot \overline{F_2' A_2} = -f_2'^2$  conduit à  $\overline{F_2 A_1} > 0$  car  $\overline{F_2' A_2} < 0$ . Donc il faut **déplacer l'oculaire vers la gauche** pour le rapprocher de  $A_1$ .

5. a) On note les images successives ainsi :  $A_m \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A_{1m} \xrightarrow{\mathcal{L}_2} A_{2m}$ . En utilisant la relation de Newton de proche en proche on obtient

$$\overline{F_1 A_m} = -\frac{f_1'^2}{F_1' A_{1m}} = -\frac{f_1'^2}{F_1' F_2 + F_2' A_{1m}} = -\frac{f_1'^2}{\Delta + F_2' A_{1m}} = -\frac{f_1'^2}{\Delta - \frac{f_2'^2}{F_2' A_{2m}}} = -\frac{f_1'^2}{\Delta - \frac{f_2'^2}{F_2' O_2 + O_2' A_{2m}}}$$

$$\boxed{\overline{F_1 A_m} = -\frac{f_1'^2}{\Delta + \frac{f_2'^2}{F_2' + d_m}}}$$

- b) D'après la relation trouvée en 3.a) et en prenant  $d_m \approx 25$  cm, on obtient :  $A_m A_0 = \frac{f_1'^2}{\Delta} - \frac{f_1'^2}{\Delta + \frac{f_2'^2}{F_2' + d_m}} \approx$

$4,5 \mu\text{m}$ . On note que  $A_m A_0 \sim D$ , donc cette valeur est **du même ordre de grandeur que les plus petits détails transversaux** que l'on souhaite regarder. Cela signifie que malgré la capacité d'accommodation de l'œil, le microscope impose une observation dans une tranche de l'échantillon d'épaisseur compatible avec la taille de ce que l'on souhaite observer. On ne risque donc pas d'observer une superposition de plusieurs objets situés dans des plans transverses différents (plusieurs cellules, bactéries), ce qui nuirait à la qualité de l'observation.

### 11.3. Champ et luminosité

6. a) On réutilise ici le rayon 2 déjà tracé (en bleu), ainsi qu'un autre rayon (le 5 ou le 6, en rose). Ils émergent forcément parallèles entre eux car  $B_2$  est à l'infini. cf figure.  
 b) Les deux rayons roses choisis sont en fait des rayons extrêmes du faisceau constituant l'image de  $B_0$ , l'un passant par le bord de l'objectif (5), l'autre par le bord de l'oculaire (6). Le point  $B_1$  ne sera plus visible à travers l'oculaire dès lors que ce faisceau sera réduit à un unique rayon, c'est-à-dire si ce rayon passe par les extrémités de l'objectif et de l'oculaire (cf trait rose en pointillés). Ceci permet de localiser  $B_{1\text{max}}$ , que l'on reproduit en bas par symétrie pour plus de clarté. Le théorème de Thalès conduit alors à

$$\frac{A_1 B_{1\text{max}} - r_1}{r_2 - r_1} = \frac{O_1 F_2}{O_1 O_2} = \frac{f_1' + \Delta}{f_1' + \Delta + f_2'} \quad \text{d'où} \quad \boxed{A_1 B_{1\text{max}} = r_1 + \frac{(r_2 - r_1)(f_1' + \Delta)}{f_1' + \Delta + f_2'}}$$

- c) Le grandissement transversal obtenu en 3.b) permet de connaître le rayon du champ de vision :

$$r_{\text{champ}} = \frac{A_1 B_{1\text{max}}}{|\gamma_{\text{ob}}|} \quad \text{d'où} \quad \boxed{r_{\text{champ}} = \frac{f_1'}{\Delta} \left( r_1 + \frac{(r_2 - r_1)(f_1' + \Delta)}{f_1' + \Delta + f_2'} \right)} = 0,53 \text{ mm}.$$

De nouveau on trouve que l'observation correspond à une zone très limitée sur l'échantillon.

7. a) On trace 2 rayons remarquables issus de  $M_1$  (en rouge, rayons 7 et 8). On note  $M_2$  leur intersection, image de  $M_1$  par l'oculaire  $\mathcal{L}_2$ .  
 b) Tous les rayons émergent de l'oculaire sont d'abord passés par l'objectif. Donc par symétrie de révolution, l'ensemble du faisceau lumineux émergent du microscope a pour section transversale au niveau de  $M_2$  un disque de centre  $O_{oc}$  (projeté orthogonal de  $M_2$  sur l'axe), qui est **l'image du disque de l'objectif par l'oculaire**, appelé le **cercle oculaire**.

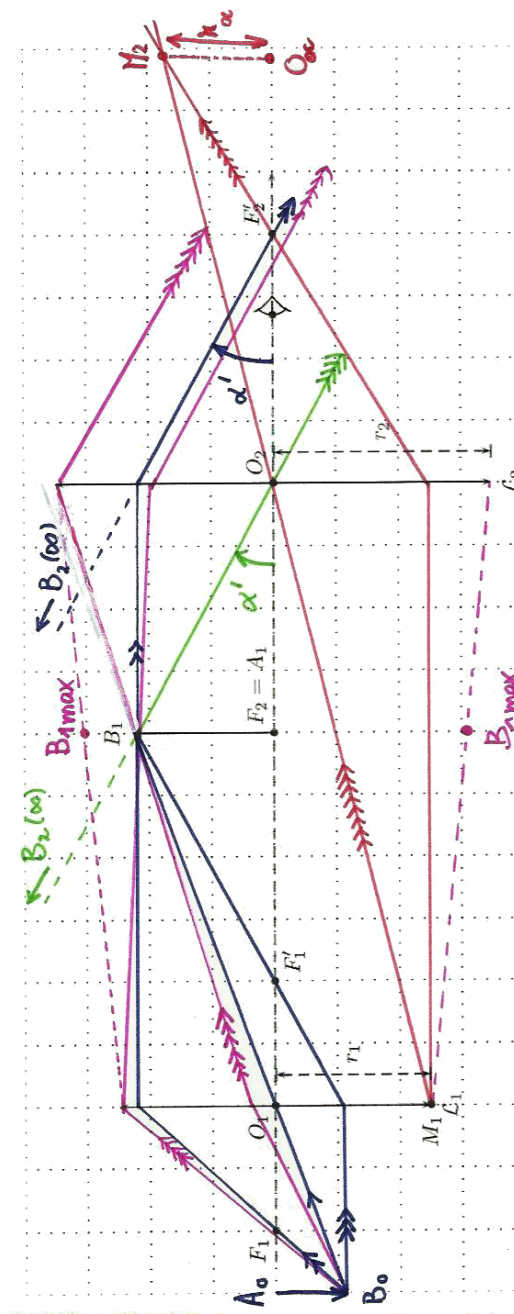
Son rayon vérifie  $r_{oc} = |\gamma_{oc}| \cdot r_1$ , avec  $\gamma_{oc} = \frac{f_2'}{F_2' O_1}$  le grandissement de l'oculaire par la formule de

Newton. D'où  $r_{oc} = \frac{r_1 f_2'}{f_1' + \Delta} = 0,53 \text{ mm}$  (assez petit pour pénétrer intégralement dans la pupille).

La position de ce cercle est obtenue par la relation de conjugaison :

$$\overline{O_2 O_{oc}} = \overline{O_2 F_2'} + \overline{F_2' O_{oc}} = f_2' - \frac{f_2'^2}{F_2' O_1} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\overline{O_2 O_{oc}} = f_2' + \frac{f_2'^2}{f_1' + \Delta}} = 2,2 \text{ cm},$$

ce qui confirme qu'il est situé très près du foyer image  $F_2'$ .

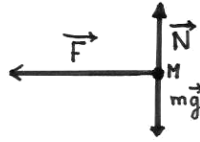


### III. Étude de systèmes masse-ressort

#### III.1. Oscillation d'une seule masse

1.

- a) La masse subit son poids  $m\vec{g}$ , la réaction normale  $\vec{N}$  qui lui est exactement opposée car il n'y a pas de mouvement vertical, et la force élastique  $\vec{F}$ . On choisit un instant où le ressort est étiré, donc  $\vec{F}$  est dirigée vers la gauche.



- b) La loi de Hooke s'écrit ici  $\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_x$  en notant  $\ell$  la longueur du ressort. Or  $\ell = x$  d'après le choix d'origine. Le mouvement est rectiligne donc l'accélération s'écrit  $\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x$ . Par projection selon  $\vec{u}_x$  du théorème de la résultante cinétique dans le référentiel du laboratoire considéré galiléen, on obtient donc

$$m\ddot{x} = -k(x - \ell_0) \Leftrightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \ell_0} \text{ avec } \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}.$$

- c) Le second membre étant constant, la solution générale s'écrit  $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \ell_0$ . La position de repos correspond au ressort non comprimé, donc  $x = \ell_0$ . Les conditions initiales  $x(0) = \ell_0 - \Delta\ell$  et  $\dot{x}(0) = 0$  permettent de trouver les constantes  $A$  et  $B$ , d'où  $\boxed{x(t) = -\Delta\ell \cos(\omega_0 t) + \ell_0}$ .

- d) Avec ces nouvelles conditions initiales,  $x(0) = \ell_0 \Rightarrow A = 0$  et  $\dot{x}(0) = v_0 \Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega_0}$  d'où  $\boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \ell_0}$ .

- e) On cherche une condition pour que  $x(t) > 0$  pour tout  $t$ , on cherche donc sa position extrême  $x_{\min}$  à gauche.  
Premier cas :  $x_{\min} = -\Delta\ell + \ell_0 > 0 \Leftrightarrow \boxed{\Delta\ell < \ell_0}$  ce qui est forcément vérifié puisque le ressort est lâché comprimé.  
Second cas :  $x_{\min} = -\frac{v_0}{\omega_0} + \ell_0 > 0 \Leftrightarrow \boxed{v_0 < \ell_0 \omega_0}$ , ce qui nécessite une vitesse suffisamment faible.

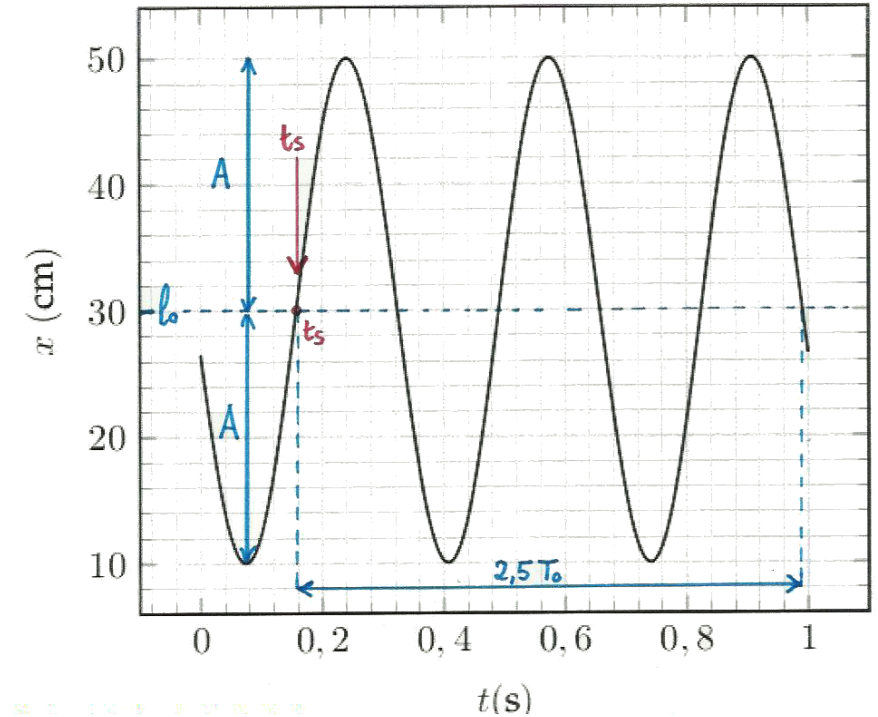
2. a) La longueur à vide  $\ell_0$  correspond à la position d'équilibre, et donc à la position centrale (équidistante des extrêmes). C'est aussi un point d'inflexion pour  $x(t)$  car la force y étant nulle, c'est un extremum de vitesse :  $\ell_0 = 30,0 \text{ cm}$ .  
On en déduit l'amplitude, qui est aussi la moitié de l'amplitude crête à crête :  $A = 20,0 \text{ cm}$ .  
La période est mesurée grâce aux zéros du cosinus les plus éloignés, soit  $2,5T_0 = 0,99 - 0,16 = 0,83 \text{ s}$  d'où  $T_0 = 0,33 \text{ s}$  (cf graphe ci-dessous).

b) On a  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$  d'où  $\boxed{k = \frac{4\pi^2 m}{T_0^2} = 36 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}}$ .

#### III.2. Mouvement conjoint de 2 masses indépendantes

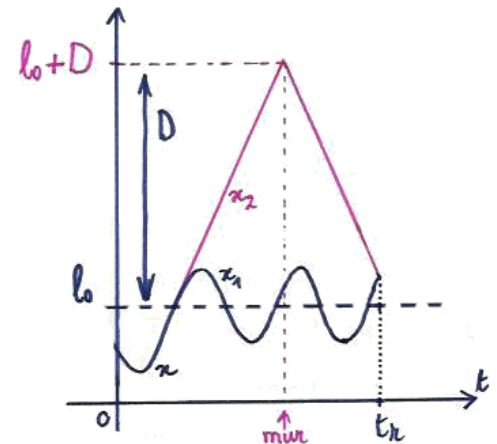
3. a) Le ressort exerce une traction dès lors que sa longueur dépasse  $\ell_0$ , donc  $x > \ell_0$ . Ceci se produit pour la première fois à  $t_s = 0,16 \text{ s}$  (cf graphe).  
b) La séparation correspond au croisement de la position d'équilibre par le système des 2 masses, qui vérifie  $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) + \ell_0$  avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$  pour  $t \leq t_s$ . On a alors  $\boxed{x(t_s) = \ell_0}$  et  $\cos(\omega_0 t_s + \varphi) = 0$ , donc  $\sin(\omega_0 t_s + \varphi) = -1$  car c'est un zéro montant du cosinus (c'est-à-dire  $\omega_0 t_s + \varphi = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ ). Ceci permet d'écrire que la vitesse est maximale à cet instant :  $\boxed{\dot{x}(t_s) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t_s + \varphi) = A\omega_0}$ . Pour  $t > t_s$ , on a maintenant la position de  $M_1$  qui vérifie  $x_1(t) = A' \cos(\omega_1(t - t_s)) + B' \sin(\omega_1(t - t_s)) + \ell_0$  avec  $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}}$ . On applique ces nouvelles conditions initiales par continuité de la position et de la vitesse :

$x_1(t_s) = \ell_0 = A' + \ell_0$  donc  $A' = 0$ ; puis  $\dot{x}_1(t_s) = A\omega_0 = B'\omega_1$  d'où  $B' = A \frac{\omega_0}{\omega_1} = A \sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}}$ .  
D'où finalement  $\boxed{x(t) = A \sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}} \sin(\omega_1(t - t_s)) + \ell_0}$  avec  $\boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}}}$  et  $A$  tel que déterminé en 2.a).



4.

- a) Par continuité la vitesse de  $M_2$  est la même que celle de  $M_1$  à  $t = t_s$ , donc  $\boxed{\dot{x}_2(t_s) = A\omega_0}$ . Par la suite  $M_2$  ne subit aucune force horizontale, sauf celle du mur au moment du choc. Donc son mouvement est rectiligne uniforme ( $\ddot{x}_2 = 0$ ) et de vitesse  $A\omega_0 \vec{u}_x$  avant le choc et  $-A\omega_0 \vec{u}_x$  après.  
b) Graphiquement, le mouvement de  $M_2$  correspond à 2 segments de droite symétriques par rapport à l'instant du choc contre le mur. La pente du premier est égale à celle de  $x_1(t)$  au moment de la séparation. L'intersection du second avec  $x_1(t)$  donne  $t_r$ . cf figure ci-contre.



c) La recombinaison doit avoir lieu lorsque  $\dot{x}_1 = -A\omega_0$ , donc au moment où  $x_1 = \ell_0$  en décroissant. Cela se produit au bout d'un nombre demi-impair de périodes  $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ , donc à l'instant  $t_r = t_s + (n + \frac{1}{2})T_1$  avec  $n \in \mathbb{N}$ . Pendant ce temps,  $M_2$  a réalisé un aller-retour donc parcouru la distance  $2D$  à la vitesse  $A\omega_0$ , pendant la durée  $\frac{2D}{A\omega_0} = (n + \frac{1}{2})T_1$ . De cette dernière équation on déduit

$$\frac{2D}{A\omega_0} = (n + \frac{1}{2}) \frac{2\pi}{\omega_1} \Rightarrow \frac{\omega_0}{\omega_1} = \sqrt{\frac{m_1}{m}} = \frac{D}{\pi A (n + \frac{1}{2})} \quad \text{d'où}$$

$$m_1 = m \frac{D^2}{\pi^2 A^2 (n + \frac{1}{2})^2} \quad \text{avec } n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad m_2 = m - m_1.$$

Notons que l'on doit avoir nécessairement  $m_1 < m$ , donc

$$\frac{D^2}{\pi^2 A^2 (n + \frac{1}{2})^2} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{D}{\pi A} - \frac{1}{2} = \underline{1,9} \quad \text{d'où} \quad \boxed{n \geq 2}.$$

Il y a donc une infinité de solutions. Par exemple :

$$\begin{array}{l} n = 2 : \quad m_1 = 92 \text{ g}, \quad m_2 = 9 \text{ g}; \\ n = 3 : \quad m_1 = 47 \text{ g}, \quad m_2 = 53 \text{ g}; \\ n = 4 : \quad m_1 = 28 \text{ g}, \quad m_2 = 72 \text{ g}; \\ \dots \end{array}$$

5. À partir de l'instant de recombinaison  $t_r$  la position de l'ensemble est  $x(t_r) = x(t_s)$  et sa vitesse est  $\dot{x}(t_r) = -\dot{x}(t_s) = -A\omega_0$ . Donc au bout d'une demi-période  $\frac{T_0}{2}$ , c'est-à-dire à l'instant

$$t = t_r + \frac{T_0}{2} = t_s + (n + \frac{1}{2})T_1 + \frac{T_0}{2} = t_s + \frac{2D}{A\omega_0} + \frac{T_0}{2} = t_s + T_0 \left( \frac{D}{A\pi} + \frac{1}{2} \right),$$

le système se retrouve dans le même état qu'à l'instant  $t_s$  (même position et même vitesse). Par conséquent le mouvement va se poursuivre de façon identique en enchaînant des cycles séparation-recombinaison

périodiques de durée  $T = T_0 \left( \frac{D}{A\pi} + \frac{1}{2} \right) = \underline{0,96 \text{ s}}$ .