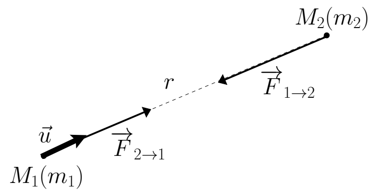
# MÉCANIQUE

## I. Astérosismologie

**1.** L'interaction gravitationnelle entre deux points matériels $M_1(m_1)$ et $M_2(m_2)$ s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{1\to 2} = -\mathcal{G}\,\frac{m_1 m_2}{r^2}\,\vec{u}} \quad \text{avec} \quad \vec{u} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{M_1M_2}$$

$$\text{ou} \quad \boxed{\overrightarrow{F}_{1\to 2} = -\mathcal{G} m_1 m_2\,\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{{M_1M_2}^3}}$$

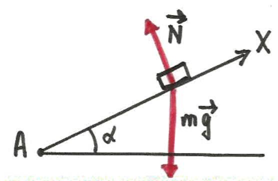



**2.** On obtient $[R] = L$, $[M_e] = M$ et $[\mathcal{G}] = M^{-1}.L^3.T^{-2}$. Comme $[f] = T^{-1}$, une forme $f = k.M_e^\alpha.R^\beta.\mathcal{G}^\gamma$ donne nécessairement $\alpha = \gamma = \frac{1}{2}$ et $\beta = -\frac{3}{2}$. Finalement on obtient $\boxed{f = k\sqrt{\dfrac{M_e\mathcal{G}}{R^3}}}$.

**3.** Ce qui donne pour le Soleil $\underline{f \approx 6\times 10^{-4}\,\text{Hz}}$.
C'est beaucoup trop grave pour être audible (entre 20 Hz et 20 kHz pour l'oreille humaine). En pratique ces fréquences sont transposées de 18 octaves, c'est-à-dire multipliées par $2^{18}$.

## II. Mouvement d'un glaçon sur un tremplin

**1.** On applique le Théorème de la Résultante Cinétique (TRC) au glaçon, dans le référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire, considéré galiléen. Le glaçon subit uniquement son poids $m\vec{g}$, ainsi qu'une réaction normale à la rampe $\vec{N}$, donc




$$m\left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = m\vec{g} + \vec{N}\,.$$

Le mouvement étant rectiligne sur la rampe, on projette selon le vecteur directeur de la rampe, $\vec{u}_X = \cos\alpha\vec{u}_x + \sin\alpha\vec{u}_z$, ce qui permet d'éliminer la réaction normale. Notons $(A_X)$ l'axe dirigé par $\vec{u}_X$. La coordonnée $X$ permet d'écrire la vitesse $\vec{v} = \dot{X}\,\vec{u}_X$ et l'accélération $\vec{a} = \ddot{X}\,\vec{u}_X$. D'où

$$\ddot{X} = -g\vec{u}_z.\vec{u}_X = -g\sin\alpha \quad\Rightarrow\quad v(t) = \dot{X}(t) = -g\sin(\alpha)\,t + v_A \quad \text{donc} \quad \boxed{\vec{v}(t) = (v_A - g\sin(\alpha)\,t)\,\vec{u}_X}.$$

**2.** En considérant la position initiale $X(0) = 0$, on intègre de nouveau :

$$X(t) = v_A t - \frac{1}{2}g\sin(\alpha)\,t^2\,.$$

Le point B est atteint lorsque $X = AB = \frac{R}{\tan\alpha}$. Cela se produit à l'instant $t_B$ tel que

$$\frac{R}{\tan\alpha} - v_A t_B + \tfrac{1}{2}g\sin(\alpha)\,t_B^2 = 0$$

ce qui est possible uniquement si le discriminent $v_A^2 - \frac{2Rg\sin\alpha}{\tan\alpha} = v_A^2 - 2Rg\cos\alpha$ est positif, donc si $\boxed{v_A \geq v_l}$ avec $\boxed{v_\ell = \sqrt{2Rg\cos\alpha}} = \underline{5,8\,\text{m.s}^{-1}}$.

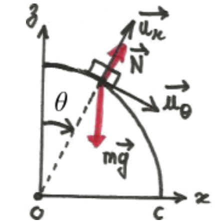


PCSI 1 - Stanislas DS de PHYSIQUE N°1 - 29/09/18 - CORRIGÉ A. MARTIN

**3.** Il existe 2 instants solutions $t_B = \frac{v_A}{g\sin\alpha} \pm \frac{\sqrt{v_A^2 - v_\ell^2}}{g\sin\alpha}$. On choisi la plus petite valeur car la grande correspond au retour du glaçon en B après s'être arrêté plus loin, si la rampe se poursuivait après le point B. Donc $\boxed{t_B = \dfrac{v_A}{g\sin\alpha} - \dfrac{\sqrt{v_A^2 - v_\ell^2}}{g\sin\alpha}}$.

**4.** En injectant cette valeur dans $v(t) = ||\vec{v}(t)|| = |v_A - g\sin(\alpha)\,t|$, on obtient $\boxed{v_B = \sqrt{v_A^2 - v_\ell^2} = \sqrt{v_A^2 - 2Rg\cos\alpha}}$.

**5.** Maintenant le mouvement est circulaire de rayon $R$ tant que le glaçon reste en contact avec le profil. Donc la vitesse s'écrit $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$, et le TRC s'écrit dans la base polaire :




$$m(-R\dot{\theta}^2\,\vec{u}_r + R\ddot{\theta})\,\vec{u}_\theta = N\vec{u}_r - mg\cos\theta\vec{u}_r + mg\sin\theta\vec{u}_\theta$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \vec{u}_r : & -R\dot{\theta}^2 = \frac{N}{m} - g\cos\theta & (1) \\ \vec{u}_\theta : & R\ddot{\theta} = g\sin\theta & (2) \end{cases}$$

**6.** La seconde équation peut être intégrée à condition d'être au préalable multipliée par $\dot{\theta}$, et en appliquant les conditions initiales du mouvement circulaire en $t = t_B$ pour la constante :

$$R\dot{\theta}\,\ddot{\theta} - \dot{\theta}\,g\sin\theta = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{R}{2}\,\dot{\theta}^2 + g\cos\theta = \frac{R}{2}\,\dot{\theta}^2(t_A) + g\cos(\theta(t_A)) = \frac{v_B^2}{2R} + g\cos\alpha \quad \text{d'où}$$

$$\boxed{\dot{\theta} = -\sqrt{\frac{v_B^2}{R^2} + \frac{2g}{R}(\cos\alpha - \cos\theta)}},$$

car on a $\dot{\theta} < 0$.

**7.** On reprend maintenant l'équation (1) dans laquelle on injecte le précédent résultat :

$$N/m = -R\dot{\theta}^2 + g\cos\theta = -\frac{v_B^2}{R} + -2g(\cos\alpha - \cos\theta) + g\cos\theta \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{N = -\frac{mv_B^2}{R} + mg(3\cos\theta - 2\cos\alpha)},$$

avec $\boxed{\vec{N} = N\,\vec{u}_r}$.

**8.** On souhaite que $N(\theta)$ ne s'annule jamais entre $\theta = -\alpha$ et le sommet $\theta = 0$. Or sur ce domaine, $N(\theta)$ est croissante en $\theta$, minimale en $\theta = -\alpha$ et maximale en $\theta = 0$. Donc une condition nécessaire et suffisante pour que le glaçon ne décolle pas avant le sommet est que

$$N(-\alpha) > 0 \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{mv_B^2}{R} + mg(3\cos\alpha - 2\cos\alpha) > 0 \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{v_B < \sqrt{gR\cos\alpha}}.$$

Comme $v_B^2 = v_A^2 - v_\ell^2 = v_A^2 - 2gR\cos\alpha$, on obtient finalement $\boxed{v_A < v'_\ell = \sqrt{3gR\cos\alpha}} = \underline{7,1\,\text{m.s}^{-1}}$.

**9.** Si la condition précédente n'est pas vérifiée, c'est-à-dire si $v_A > v'_\ell$, alors le décollage a lieu en $\theta_d = \alpha$, dès l'arrivée sur le cercle.
Sinon on cherche $\theta_d$ vérifiant $N(\theta_d) = 0$, sachant que

$$N(\theta) = -\frac{mv_B^2}{R} + mg(3\cos\theta - 2\cos\alpha) = -\frac{mv_A^2}{R} + 2mg\cos\alpha + mg(3\cos\theta - 2\cos\alpha) = -\frac{mv_A^2}{R} + 3mg\cos\theta\,,$$

d'où $\boxed{\theta_d = \arccos\left(\dfrac{v_A^2}{3gR}\right)}$.

En l'occurrence, on a $v_\ell < v_A < v'_\ell$, donc le glaçon atteint le sommet sans décoller, et la dernière relation donne $\underline{\theta_d = 0,59\,\text{rad} = 33°}$.

## III. Mouvement d'une bille sur un rail

**1.** *On connaît l'équation intrinsèque de la trajectoire c'est-à-dire le lien entre les coordonnées. Ceci permet d'écrire le vecteur vitesse comme proportionnel à $\dot\theta$ par exemple :*

$$\vec v = \dot r\,\vec u_r + r\dot\theta\,\vec u_\theta + \dot z\,\vec u_z = \dot\theta\left(\beta r\,\vec u_r + r\,\vec u_\theta - \frac{\beta}{\tan\alpha}\,r\,\vec u_z\right) = r\,\dot\theta\left(\beta\,\vec u_r + \vec u_\theta - \frac{\beta}{\tan\alpha}\,\vec u_z\right)$$

On fabrique le vecteur tangent $\vec u_t$ en divisant $\vec v$ par sa norme, car $\vec v = v\,\vec u_t$, avec $v = ||\vec v||$ :

$$v = r\dot\theta\sqrt{\beta^2+1+\frac{\beta^2}{\tan^2\alpha}} \quad \text{car} \quad \dot\theta > 0 \quad \text{, donc} \quad \boxed{\vec u_t = \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2/\sin^2\alpha}}\left(\beta\,\vec u_r + \vec u_\theta - \frac{\beta}{\tan\alpha}\,\vec u_z\right)},$$

en utilisant que $1+\frac{1}{\tan^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

**2.** On applique le théorème de la résultante cinétique à la bille dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$ considéré galiléen, en travaillant avec $\vec u_t$ :

$$m\left.\frac{\mathrm d\vec v}{\mathrm dt}\right|_{\mathcal R} = m\dot v\,\vec u_t + mv\left.\frac{\mathrm d\vec u_t}{\mathrm dt}\right|_{\mathcal R} = m\vec g + \vec N\,,$$

où $\vec N$ représente la réaction du support, qui est orthogonale à $\vec u_t$ en l'absence de frottements.
En projetant selon $\vec u_t$, on peut donc éliminer l'accélération normale ainsi que la réaction :

$$m\dot v\,\vec u_t.\vec u_t + mv\left.\frac{\mathrm d\vec u_t}{\mathrm dt}\right|_{\mathcal R}.\vec u_t = m\vec g.\vec u_t + \vec N.\vec u_t \quad\Leftrightarrow\quad \dot v = -g\vec u_z.\vec u_t = \frac{g\beta}{\tan\alpha\sqrt{1+\beta^2/\sin^2\alpha}}$$

c'est-à-dire $\boxed{\dot v = \frac{g\beta\,\cos\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha+\beta^2}}} = \text{constante}$ . On a utilisé que $\left.\frac{\mathrm d\vec u_t}{\mathrm dt}\right|_{\mathcal R}.\vec u_t = 0$ car $||\vec u_t|| = \text{constante}$ .

**3.** En intégrant avec une vitesse initiale nulle, on obtient $\boxed{v(t) = \frac{g\beta\,\cos\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha+\beta^2}}\,t}$ .

Les équations différentielles portant sur les coordonnées sont obtenues par identification des composantes de $\vec v = v.\vec u_t$, ce qui donne d'abord :

$$\dot r(t) = \frac{\beta\,v(t)}{\sqrt{1+\beta^2/\sin^2\alpha}} = \frac{g\beta^2\,\cos\alpha\,\sin\alpha}{\sin^2\alpha+\beta^2}\,t \quad\Rightarrow\quad \boxed{r(t) = \frac{g\beta^2\,\cos\alpha\,\sin\alpha}{2(\sin^2\alpha+\beta^2)}\,t^2 + r_0},$$

puis

$$\dot\theta(t) = \frac{v(t)}{r(t)\sqrt{1+\beta^2/\sin^2\alpha}} = \frac{\dot r(t)}{\beta r(t)} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\theta(t) = \frac{1}{\beta}\,\ln\left(\frac{r(t)}{r_0}\right)},$$

et enfin

$$\dot z(t) = -\frac{\beta\,v(t)}{\tan\alpha\sqrt{1+\beta^2/\sin^2\alpha}} = -\frac{1}{\tan\alpha}\,\dot r(t) \quad\Rightarrow\quad \boxed{z(t) = -\frac{1}{\tan\alpha}\,r(t) = -\frac{g\beta^2\,\cos^2\alpha}{2(\sin^2\alpha+\beta^2)}\,t^2 + z_0}$$

avec $\boxed{z_0 = -\frac{r_0}{\tan\alpha}}$ .

*Remarque : on retrouve bien un mouvement circulaire horizontal dans les cas particuliers $\beta = 0$ ou $\alpha = \frac{\pi}{2}$.*

**4.** En projetant le théorème de la résultante cinétique $m\left.\frac{\mathrm d\vec v}{\mathrm dt}\right|_{\mathcal R} = m\vec g + \vec N$ selon $\vec u_z$, on obtient

$$m\ddot z = -mg + N_z \quad\Rightarrow\quad \boxed{N_z = mg\left(1 - \frac{\beta^2\,\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\beta^2}\right)} = \text{constante}\,.$$

*Remarque : de nouveau, on vérifie dans le cas du mouvement circulaire horizontal ($\beta = 0$ ou $\alpha = \frac{\pi}{2}$) que cela donne $N_z = mg$. Dans ce cas la réaction normale compense simplement le poids, ce qui est cohérent.*