

THERMODYNAMIQUE ET INDUCTION

I. Humidité de l'air (d'après E3A PC 2009)

I.1. Relations thermodynamiques générales de l'air humide

1. La pression est la force par unité de surface engendrée par l'ensemble des collisions incessantes des particules du gaz contre les parois. En distinguant les collisions liées à chaque type de molécule, on peut définir des *pressions partielles*, qui vérifient chacune l'équation des gaz parfaits pour une même température :

$$P_a V = \frac{m_a}{M_a} RT \quad \text{et} \quad P_v V = \frac{m_v}{M_v} RT.$$

Les forces étant additives comme la quantité de mouvement, les pressions partielles s'additionnent en une pression totale $P_A = P_a + P_v$.

2. En utilisant les relations précédentes :

$$w = \frac{m_v}{m_a} = \frac{P_v M_v}{P_a M_a} \quad \text{d'où} \quad w = \delta \frac{P_v}{P_A - P_v} \quad \text{avec} \quad \delta = \frac{M_v}{M_a}.$$

3. L'humidité w croît avec P_v donc $w_M = \delta \frac{P_s(T)}{P_A - P_s(T)}$. On lit $P_s(T) = 32 \text{ hPa}$ sur le graphe, d'où $w_M = 0,020$.

4.
 - Si P_A est constante, alors comme $P_s(T)$ croît avec T , w_M **croît avec T** .
 - Si T est constante, alors $P_s(T)$ est fixée, et donc w_M **diminue si P_A augmente**.
5. Notons $\theta_1 = 25^\circ\text{C}$, et $T_1 = \theta_1 + 273,15 = 298,15 \text{ K}$. On obtient

$$m_v = \frac{M_v V}{RT_1} h P_s(\theta_1) = 3,3 \text{ kg} \quad \text{et} \quad m_a = \frac{M_a V}{RT_1} (P_A - h P_s(\theta_1)) = 410 \text{ kg}.$$

D'où $m_h = m_v + m_a = 413 \text{ kg}$.

6. Notons $\theta_2 = 5^\circ\text{C}$. En journée, l'humidité absolue vaut $w_1 = \frac{m_v}{m_a} = 0,0079$. Or pendant la nuit l'humidité maximale est $w_{M2} = \delta \frac{P_s(\theta_2)}{P_A - P_s(\theta_2)} = 0,0056$. À l'équilibre on ne peut avoir $w > w_M$, donc une partie de la vapeur d'eau s'est liquéfiée jusqu'à atteindre $w_2 = w_{M2}$. L'air est alors saturé donc $h_2 = 1$.

La quantité de vapeur restante est $m_{v2} = m_a w_{M2} = m_a \delta \frac{P_s(\theta_2)}{P_A - P_s(\theta_2)} = 2,3 \text{ kg}$. D'où par différence, la masse d'eau qui s'est liquéfiée est $m_e = m_v - m_{v2} = 1,0 \text{ kg}$.

7. Par définition de T_R :

$$w = w_M(T_R) = \delta \frac{P_s(T_R)}{P_A - P_s(T_R)} \Leftrightarrow P_s(T_R) = \frac{w P_A}{\delta + w} = \frac{m_v P_A}{\delta m_a + m_v} = 12,8 \text{ hPa}$$

ce qui conduit, d'après le graphique, à $\theta_R = 10,5^\circ\text{C}$ ($T_R = 283 \text{ K}$).

8. Notons comme précédemment $\theta_1 = 25^\circ\text{C}$ et $\theta_3 = 8^\circ\text{C}$, et T_1 et T_3 les températures absolues associées. La mesure du point de rosée avec la lame correspond à $w = w_M(\theta_3) = w_{M3}$ et $h(\theta_3) = 1$, ce qui conduit à la pression de vapeur à la température θ_3 : $P_v(\theta_3) = P_s(\theta_3) = 11 \text{ hPa}$. On en déduit la pression de vapeur à θ_1 , par changement de température isobare : $P_v(\theta_1) = \frac{T_1}{T_3} P_v(\theta_3)$. En utilisant les expressions précédentes on en déduit

$$h = \frac{P_v(\theta_1)}{P_s(\theta_1)} = \frac{T_1 P_s(\theta_3)}{T_3 P_s(\theta_1)} = 0,36 \quad \text{et} \quad w = w_{M3} = \delta \frac{P_s(\theta_3)}{P_A - P_s(\theta_3)} = 0,0068,$$

l'humidité absolue étant indépendante de la température pour un système fermé.

I.2. Évolution et équilibre en vase clos

9. La transformation est isobare, donc $\delta Q = dH$.

Par extensivité on décompose : $H = H_\ell + H_v + H_a = m_\ell h_\ell + m_v h_v + m_a h_a$.

Or les enthalpies massiques de gaz parfait h_v et h_a ne dépendent que de la température. Et h_ℓ ne dépend que de la température et de la pression. Ainsi au cours de la transformation **isotherme et isobare** seules les masses m_ℓ et m_v varient, avec par conservation $dm_\ell = -dm_v$. Finalement on obtient

$$\delta Q = dm_\ell h_\ell + dm_v h_v + 0 = dm_v (h_v - h_\ell) \Leftrightarrow \boxed{\delta Q = \ell_v \cdot dm_v}.$$

10. a) On applique le premier principe et le second pour une masse m_v de vapeur d'eau passant de façon isotherme et supposée réversible de la pression P_A à la pression P_v :

- $dU = \delta Q_{\text{rev}} + \delta W_{\text{rev}} = T dS - P dV$.

C'est un gaz parfait donc la 1ère loi de Joule donne $dU = 0$ pour une transformation isotherme $T = T_A$.

De plus $V = \frac{m_v R T_A}{P M_v}$ donc

$$dS = \frac{P}{T_A} dV = \frac{P m_v R T_A}{T_A M_v} d\left(\frac{1}{P}\right) = -\frac{P m_v R}{M_v P^2} dP = -\frac{m_v R}{M_v} d(\ln P) \quad \text{d'où} \quad ds = -\frac{R}{M_v} d(\ln P),$$

ce qui après intégration donne¹ :

$$\boxed{s_v = s_{vA} - \frac{R}{M_v} \ln\left(\frac{P_v}{P_A}\right)}.$$

- De même pour l'air sec, on obtient par le même raisonnement $\boxed{s_a = s_{aA} - \frac{R}{M_a} \ln\left(\frac{P_a}{P_A}\right)}$.

- b) L'évolution étant isobare, $P_A = \text{constante}$, donc $\boxed{dP_a + dP_v = 0}$.

- c) L'entropie d'une phase condensée supposée incompressible ne dépend que de la température², donc elle ne varie pas ici.

Finalement par extensivité on trouve $S = S_\ell + S_v + S_a = m_\ell s_\ell + m_v s_v + m_a s_a$.

Dans cette expression, seules les variables m_ℓ , m_v , s_v et s_a vont varier au cours de la transformation car elle est isotherme, et car les pressions partielles P_v et P_a vont varier. En notant que $dm_\ell = -dm_v$ et $dP_a = -dP_v$ on obtient

$$\begin{aligned} dS &= dm_\ell s_\ell + dm_v s_v + m_v ds_v + m_a ds_a = dm_v (s_v - s_\ell) - \frac{m_v R}{M_v} \frac{dP_v}{P_v} - \frac{m_a R}{M_a} \frac{dP_a}{P_a} \\ &= dm_v (s_v - s_\ell) - \frac{V}{T_A} (dP_v + dP_a) = dm_v (s_v - s_\ell) - 0 \quad \text{d'où} \end{aligned}$$

$$\boxed{dS = \left(s_{vA} - \frac{R}{M_v} \ln\left(\frac{P_v}{P_A}\right) - s_\ell \right) \cdot dm_v}.$$

11. Le second principe pour (S) s'écrit $dS = \delta S_e + \delta S_c$ avec $\delta S_e = \frac{\delta Q}{T_A}$ car on peut considérer l'extérieur comme un thermostat (transformation isotherme au contact de l'atmosphère). D'après les 2 questions précédentes on obtient

$$\boxed{\delta S_c = \left(s_{vA} - \frac{R}{M_v} \ln\left(\frac{P_v}{P_A}\right) - s_\ell - \frac{\ell_v}{T_A} \right) \cdot dm_v}.$$

1. On peut retrouver ce résultat à partir de l'expression générale de la variation d'entropie (qu'il faut démontrer) : $\Delta s = c_v \Delta (\ln(P^{1-\gamma_v} T^{\gamma_v}))$ avec $c_v = \frac{R}{M_v(\gamma_v - 1)}$ et $T = T_A = \text{cte}$.

2. Le calcul classique donne $s_{\ell 2} = c_\ell \ln \frac{T_2}{T_1} + s_{\ell 1}$.

12. Par définition de la pression de saturation, le système est à l'équilibre lorsque $P_v = P_s(T_A)$. On en déduit que

$$\frac{\delta S_c}{dm_v} = s_{vA} - \frac{R}{M_v} \ln\left(\frac{P_s(T)}{P_A}\right) - s_\ell - \ell_v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad s_{vA} - s_\ell - \ell_v = \frac{R}{M_v} \ln\left(\frac{P_s(T)}{P_A}\right).$$

On peut donc ré-écrire la relation du 11. simplement

$$\delta S_c = -\frac{R}{M_v} \ln\left(\frac{P_v}{P_s(T_A)}\right) \cdot dm_v.$$

Par conséquent, comme toute évolution spontanée (irréversible) doit vérifier $\delta S_c > 0$:

- Si $P_v < P_s(T_A)$, alors $-\frac{R}{M_v} \ln\left(\frac{P_v}{P_s(T_A)}\right) > 0$, donc on a nécessairement $dm_v > 0$, donc une partie du liquide se vaporise pour faire augmenter P_v jusqu'à ce que $P_v = P_s(T_A)$;
- À l'inverse si $P_v > P_s(T_A)$ on a nécessairement $dm_v < 0$, donc une partie de la vapeur d'eau se liquéfie pour faire diminuer P_v jusqu'à ce que $P_v = P_s(T_A)$.

13. a) Si l'équilibre thermodynamique est atteint, on a $P_v = P_s(\theta_A)$. Or $P_v V = n_v R T_A$, mais le volume V n'est pas connu. À la place on connaît la pression totale, qui vérifie $P_A V = (n_v + n_{a0}) R T_A$. Ceci conduit à

$$n_v P_A = (n_v + n_{a0}) P_s(\theta_A) \quad \Leftrightarrow \quad n_v = n_{a0} \frac{P_s(\theta_A)}{P_A - P_s(\theta_A)},$$

donc par conservation de la matière

$$n_\ell = n_{\ell 0} - (n_v - n_{v0}) = n_{\ell 0} + n_{v0} - n_{a0} \frac{P_s(\theta_A)}{P_A - P_s(\theta_A)}.$$

- b) i. On applique les relations ci-dessus sous l'hypothèse que l'équilibre thermodynamique soit atteint, ce qui donne $n_\ell = 0,036 \text{ mol}$ et $n_v = 0,36 \text{ mol}$. L'hypothèse est validée puisque l'eau liquide, qui a été consommée, n'est pas en défaut.
- ii. Cette fois on trouve $n_\ell = -0,09 \text{ mol}$ ce qui est impossible. **L'eau liquide est donc en défaut et l'équilibre thermodynamique ne peut être atteint.** Il y a donc rupture d'équilibre, toute l'eau liquide est consommée, d'où $n_\ell = 0$ et $n_v = n_{v0} + n_{\ell 0} = 0,27 \text{ mol}$.

I.3. Mesure de l'humidité à l'aide du psychromètre

14. L'air incident a une humidité absolue $w = \frac{m_v}{m_a}$ donc $m_v = w m_a$.
En aval l'air est saturé, donc $w_M = \frac{m_v + m_{ev}}{m_a}$, d'où $m_{ev} = m_a (w_M - w)$.
15. Le système (S) subit une transformation isobare, donc $\Delta H = Q$. Si le courant d'air est suffisamment rapide on peut aussi la considérer adiabatique, donc $\Delta H = 0$.
16. Par extensivité, on décompose la variation d'enthalpie en trois composantes correspondant à l'air sec, la vapeur humide initialement présente, et l'eau initialement liquide évaporée. Les 2 premières vérifient la seconde loi de Joule pour des gaz parfaits (ou plus généralement pour une transformation isobare). La troisième correspond à une vaporisation isobare et donc isotherme à la température T_h .

$$\Delta H = \Delta H_a + \Delta H_v + \Delta H_{ev} = m_a c_{pa} (T_h - T) + m_v c_{pv} (T_h - T) + m_{ev} \ell_v (T_h).$$

En utilisant les relations trouvées en 14., et en divisant par m_a , on trouve

$$(w_M - w) \ell_v (T_h) = (c_{pa} + w c_{pv}) \cdot (T - T_h).$$

17. On extrait w de la relation précédente, d'où

$$w = \frac{w_M \ell_v (T_h) - c_{pa} (T - T_h)}{\ell_v (T_h) + c_{pv} (T - T_h)} \quad \text{avec} \quad w_M = \delta \frac{P_s(T_h)}{P_A - P_s(T_h)}$$

d'après la question 3.

18. On a montré en 2. que $w = \delta \frac{P_v}{P_a} = \delta \frac{P_v}{P_A - P_v}$, donc

$$h = \frac{P_v}{P_s(T)} = \frac{P_v}{P_a} \frac{P_a}{P_s(T)} = \delta \frac{P_v}{P_a} \frac{1}{\delta} \frac{P_a}{P_s(T)} = w \frac{1}{\delta} \frac{P_a}{P_s(T)} = \delta \frac{P_s(T_h)}{P_A - P_s(T_h)} \left(1 - A(T - T_h)\right) \frac{1}{\delta} \frac{P_a}{P_s(T)}$$

$$\text{d'où} \quad h = \frac{P_s(T_h)}{P_s(T)} \left(1 - A(T - T_h)\right) \frac{P_a}{P_A - P_s(T_h)}.$$

Or comme $P_v \sim P_s(T_h) \ll P_a \sim P_A$, on peut faire l'approximation $\frac{P_a}{P_A - P_s(T_h)} \approx \frac{P_a}{P_A - P_v} = 1$, d'où

$$h \approx \frac{P_s(T_h)}{P_s(T)} \left(1 - A(T - T_h)\right).$$

19. On a donc des températures $\theta = 15^\circ\text{C}$ et $\theta_h = 7^\circ\text{C}$. Le graphe donne $P_s(\theta) = 17 \text{ hPa}$ et $P_s(\theta_h) = 10 \text{ hPa}$. Ceci conduit à $h = 0,28$.

II. Production d'un rayonnement synchrotron

II.1. Propriétés générales

1. On applique le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) dans un référentiel \mathcal{R} supposé galiléen :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \Leftrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega} \wedge \vec{v} \text{ en notant } \vec{\Omega} = -\frac{q}{m}\vec{B} = \omega_c \vec{u}_z \text{ avec } \boxed{\omega_c = \frac{eB_0}{m}}.$$

• En projetant selon \vec{u}_z on obtient $\ddot{z} = 0$ donc $\dot{z} = \vec{u}_z \cdot \vec{v}_0 = 0$. Pour une vitesse initiale horizontale, il n'y a pas de mouvement selon z . **Le mouvement est donc plan** et $\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y$.

• La force magnétique ne travaille pas donc $\|\vec{v}\| = \text{constante}$. Il s'agit donc d'un **mouvement uniforme à la vitesse** $v_0 = \|\vec{v}_0\|$.

• En intégrant le PFD³ on obtient $\frac{d\vec{OM}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega} \wedge \vec{OM} + \vec{A}$, et en choisissant un point M_0 tel que $\vec{A} = -\vec{\Omega} \wedge \vec{OM}_0$, on obtient

$$\frac{d\vec{M_0M}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega} \wedge \vec{M_0M}$$

d'où l'on tire que $M_0M = \text{constante}$ en multipliant de nouveau scalairement par $\vec{M_0M}$. Il s'agit donc d'un **mouvement circulaire**.

• Le **rayon** R du mouvement circulaire et uniforme est obtenu en projetant le PFD selon \vec{u}_r , ce qui donne

$$-\frac{v_0^2}{R} = -\omega_c v_0 \Leftrightarrow \boxed{R = \frac{v_0}{\omega_c} = \frac{mv_0}{eB_0}}.$$

On en déduit aussi que la **vitesse angulaire** du mouvement est $\boxed{\frac{v_0}{R} = \omega_c}$, appelée « pulsation cyclotron ».

2. a) La trajectoire est tangente à $y = 0$ à l'instant initial, donc le centre du cercle se trouve sur la droite $x = 0$ (vérifié par les lois horaires calculées en note de bas de page). Le cas limite au-delà duquel l'électron n'atteint plus le plan $x = \ell$ correspond à une trajectoire tangente au plan $x = \ell$, donc à $R = \ell$. Ainsi, pour que l'électron puisse sortir on demande

$$R \geq \ell \Leftrightarrow \frac{mv_0}{eB_0} \geq \ell \Leftrightarrow \boxed{v_0 \geq \frac{eB_0\ell}{m}}.$$

Comme la norme de la vitesse est conservée, on aura en sortie $\boxed{\|\vec{v}'\| = v_0}$.

3. Version courte de la démonstration...

On pourrait, si on a le temps, ajouter la projection puis l'intégration (position initiale en l'origine O , vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$) :

$$\begin{cases} \ddot{x} - \omega_c \dot{y} = 0 \\ \ddot{y} + \omega_c \dot{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} - \omega_c y = v_0 \\ \dot{y} + \omega_c x = 0 \end{cases} \xrightarrow{\eta = x + iy} \begin{cases} \dot{\eta} + i\omega_c \eta = v_0 \\ \dot{\eta} - i\omega_c \eta = 0 \end{cases} \Rightarrow \eta(t) = \frac{v_0}{i\omega_c} - \frac{v_0}{i\omega_c} e^{-i\omega_c t}$$

Donc $x + i(y + \frac{v_0}{\omega_c})$ est un nombre complexe de module constant $R = \frac{v_0}{\omega_c} = \frac{mv_0}{eB_0}$, dont l'argument progresse de façon affine. Il s'agit donc un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire ω_c et de rayon R .

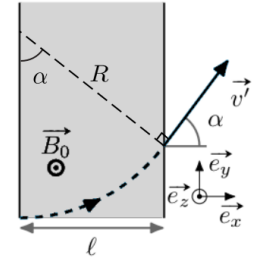
Ou encore plus long, sans passer par les complexes :

$$\begin{cases} \ddot{x} - \omega_c \dot{y} = 0 \\ \ddot{y} + \omega_c \dot{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} - \omega_c y = v_0 \\ \dot{y} + \omega_c x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \omega_c^2 x = 0 \\ \ddot{y} + \omega_c^2 y = -\omega_c v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = \frac{v_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t) \\ x(t) = \frac{v_0}{\omega_c} (\cos(\omega_c t) - 1) \end{cases} \dots$$

b)

Dans le triangle rectangle de sommet le centre du cercle, et d'hypothénuse R , on peut écrire

$$\sin \alpha = \frac{\ell}{R} \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \arcsin\left(\frac{\ell}{R}\right) = \arcsin\left(\frac{\ell eB_0}{mv_0}\right)}.$$



3. a) L'électron doit subir une force d'attraction vers la plaque du bas, qui doit donc être chargée + quand la plaque du dessus est chargée -. On a donc $\boxed{U < 0}$.

La force électrique $-e\vec{E}$ est dirigée vers le bas, et le champ électrique $\vec{E} = E\vec{u}_y$ avec $E = -\frac{U}{d}$ est dirigé vers le haut.

b) Le PFD appliqué dans \mathcal{R} s'écrit $m \frac{d\vec{v}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = q\vec{E}$, ce qui après projection et en utilisant les conditions initiales conduit à

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -\frac{eE}{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos \alpha_0 \\ \dot{y} = -\frac{eE}{m} t + v_0 \sin \alpha_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = v_0 \cos \alpha_0 t \\ y(t) = -\frac{eE}{2m} t^2 + v_0 \sin \alpha_0 t \end{cases}$$

En notant τ l'instant > 0 tel que $y(\tau) = 0$ de nouveau, on souhaite la condition pour que $x(\tau) < \ell$:

$$y(\tau) = 0 \Leftrightarrow -\frac{eE}{2m} \tau + v_0 \sin \alpha_0 = 0 \Leftrightarrow \tau = \frac{2mv_0 \sin \alpha_0}{eE} \Rightarrow x(\tau) = \frac{mv_0^2 \sin(2\alpha_0)}{eE} < \ell$$

$$\text{d'où } \boxed{v_0 < \sqrt{-\frac{eU\ell}{dm \sin(2\alpha_0)}}}.$$

c) La force électrique est conservative, elle dérive de l'énergie potentielle $E_p(y)$ telle que $-e\vec{E} \cdot d\vec{OM} = -eE dy = -dE_p$ avec $E_p = eEy = -e\frac{U}{d}y$.

Le système est conservatif donc son énergie mécanique $E_m = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - e\frac{U}{d}y$ se conserve. Au niveau de la sortie en $y = 0$ l'énergie potentielle est la même qu'au point d'entrée 1, donc la norme de la vitesse aussi : $\boxed{\|\vec{v}'\| = v_0}$.

L'axe de symétrie de la trajectoire, parabolique, est parallèle à \vec{E} donc à \vec{e}_y passant par le sommet.

Par symétrie on en déduit qu'en sortie l'angle $\boxed{(\vec{e}_x; \vec{v}') = \alpha_0}$ en valeur absolue.

d) Si l'entrée se fait au point 2, la norme de la vitesse sera changée. Par conservation de l'énergie mécanique on trouve alors

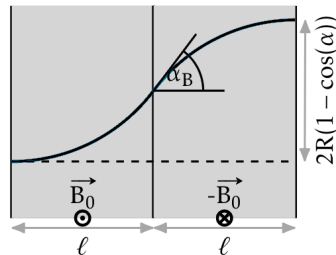
$$\frac{1}{2}mv_0^2 - e\frac{U}{2} = \frac{1}{2}m\vec{v}'^2 + 0 \Leftrightarrow \boxed{\|\vec{v}'\| = \sqrt{v_0^2 - \frac{eU}{m}}}$$

Par ailleurs la vitesse selon x est constante donc connue : $v_x = v_0 \cos \alpha_0$ en sortie. On en déduit l'angle $\alpha = (\vec{e}_x; \vec{v}')$ en sortie :

$$\begin{cases} \vec{e}_x \cdot \vec{v}' = v_x = v_0 \cos \alpha_0 \\ = \|\vec{v}'\| \cdot \cos \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \arccos\left(\frac{v_0 \cos \alpha_0}{\sqrt{v_0^2 - \frac{eU}{m}}}\right)}.$$

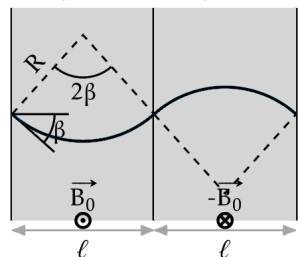
II.2. Mouvements dans des champs magnétiques alternés

4. Le résultat de la question 2.b) indique que le vecteur vitesse ne subit qu'une rotation d'angle $\alpha = \arcsin\left(\frac{\ell e B_0}{m v_0}\right)$ à la traversée d'une section. En alternant le sens des champs magnétiques, on change le signe de cette déflexion. On obtient alors la trajectoire représentée ci-contre. L'électron dérive selon \vec{e}_y au fur et à mesure qu'il progresse selon \vec{e}_x .



5. On doit donc le lancer avec un angle initial non nul par rapport à \vec{e}_x pour qu'il ne dérive pas selon \vec{e}_y . De plus, il est nécessaire que l'électron repasse pas l'axe Ox à chaque changement de cellule pour qu'il ne dérive pas. Géométriquement, on lit sur la figure ci-contre que l'angle β doit vérifier

$$2R \sin \beta = \ell \Leftrightarrow \beta = \arcsin\left(\frac{\ell}{2R}\right) = \arcsin\left(\frac{\ell e B_0}{2m v_0}\right).$$



6. On pourrait envisager de juxtaposer des cellules soumises à des tensions U de signes alternés. Cela pose deux problèmes :

- On ne peut trop rapprocher les cellules voisines car il y a un risque de claquage entre les plaques voisines chargées de façon opposée (étincelle suite au dépassement du champ disruptif du vide).
- **La moindre erreur de positionnement va engendrer un changement de vitesse en norme** (inévitables d'après la remarque précédente), et cette erreur va s'accroître à chaque traversée. **La trajectoire sera d'autant plus instable** (la norme de la vitesse ne peut changer dans le cas magnétique, ce qui diminue l'instabilité de la trajectoire).

7. Sur une cellule, l'électron parcourt un arc de cercle de longueur $2R\beta$ avec $R = \frac{\ell}{2\sin\beta}$, à la vitesse v_0 , donc en une durée

$$\Delta t = \frac{2R\beta}{v_0} = \frac{\ell\beta}{v_0 \sin\beta} \quad \text{à la vitesse moyenne} \quad v_x = \frac{\ell}{\Delta t} = v_0 \frac{\sin\beta}{\beta}.$$

Le mouvement étant circulaire uniforme, l'accélération en norme s'écrit simplement

$$a = \frac{v_0^2}{R} = \omega_c v_0 \quad \text{donc} \quad a = \frac{e B_0 v_0}{m}.$$

II.3. Puissance rayonnée

8. D'après l'expression précédente on trouve immédiatement $\mathcal{P} = \frac{e^4 v_0^3 B_0^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^3}$.

9. D'après l'expression trouvée en 5., on obtient $\sin\beta \approx \frac{\ell e B_0}{2mc} \approx 1.2$, ce qui est impossible. Ainsi, même pour la vitesse maximale possible, le champ B_0 est ici trop fort pour que les électrons suivent une trajectoire stable selon \vec{e}_x , en tout cas du point de vue de la mécanique classique...

10. Comme la force n'est pas modifiée en relativité, on peut toujours dire qu'elle ne travaille pas, donc $E_c = (\gamma - 1)mc^2$ reste constante, donc **la norme de la vitesse reste toujours constante**. Par conséquent on va trouver **un mouvement circulaire uniforme avec une masse effective γm au**

lieu de m . D'où une pulsation $\omega_c = \frac{e B_0}{\gamma m}$ et un rayon $R = \frac{\gamma m v_0}{e B_0}$. Ceci conduit à $\beta = \arcsin\left(\frac{\ell e B_0}{2\gamma m v_0}\right)$.

L'énergie cinétique permet de calculer γ : $\gamma = 1 + \frac{E_c}{mc^2} \approx 4,9 \times 10^3$. On en déduit

$$\frac{v_0}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2} = 1 - 2 \times 10^{-8} \approx 1.$$

On peut donc très raisonnablement considérer $v_0 \approx c$. Finalement on obtient $\beta \approx 2,4 \times 10^{-4} \text{ rad} = 0,013^\circ$. Cet angle est très faible, **les électrons se déplacent quasiment en ligne droite**.

11. En injectant $R = \frac{\gamma m v_0}{e B_0}$ et $v_0 \approx c$, obtient $\mathcal{P} = \frac{e^4 \gamma^2 B_0^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c} = 3,8 \times 10^{-9} \text{ W}$.

12. La plus grande longueur d'onde est obtenue pour $n = 1$.

De plus $v_x \approx v_0$ car la trajectoire est quasi-rectiligne (à 2×10^{-4} près).

Enfin le développement ci-dessus pour trouver v_0 a montré que $\frac{v_0}{c} \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2}$ donc $\frac{c}{v_0} \approx 1 + \frac{1}{2\gamma^2}$. Finalement

$$\lambda \approx \frac{\ell}{\gamma^2} = 1,8 \text{ nm}. \text{ Il s'agit d'un rayonnement de type X.}$$

13. L'énergie d'un photon étant $E_{ph} = h\nu = \frac{hc}{\lambda_0}$, le nombre de photons émis par seconde par un électron est ⁴

$$n = \frac{\mathcal{P} \lambda_0}{hc} = \frac{e^4 B_0^2 \ell}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^2 h} = 3,2 \times 10^7 \text{ photons.s}^{-1}.$$

4. Il fallait connaître la valeur numérique de la constante de Planck h pour trouver la valeur...!