THERMODYNAMIQUE ET INDUCTION

CALCULATRICES AUTORISÉES

I. Humidité de l'air

Il est nécessaire de savoir mesurer et contrôler l'humidité de l'air dans un certain nombre de processus industriels où la teneur en eau d'une phase gazeuse doit être strictement encadrée, mais aussi dans des appareils à usage domestique comme les climatiseurs, les humidificateurs ou encore les contrôleurs d'humidité utilisés dans l'industrie du bâtiment. On abordera notamment le principe du *psychromètre* (type d'hygromètre développé par Regnault au 19è siècle), qui utilise 2 thermomètres dont la différence de température peut être reliée à l'humidité [1].

Dans tout le problème, sauf mention explicite du contraire :

- la pression sous laquelle sont étudiés les phénomènes est la pression atmosphérique, dont la valeur numérique est $P_A = 1,013\,\text{bar}$;
- le symbole θ désigne la température en degré Celsius (°C), tandis que T représente la température en Kelvin (K) ;
- la constante des gaz parfaits est $R = 8,31\,\text{JK}^{-1}\text{mol}^{-1}$.

I.1. Relations thermodynamiques générales de l'air humide

Considérons un volume V d'air humide à la température T, sous la pression atmosphérique P_A. Cette phase gazeuse homogène est modélisée comme un mélange de gaz parfaits, constitué d'une masse m_a d'air sec (de masse molaire $M_\text{a} = 29\,\text{g.mol}^{-1}$) et d'une masse m_v de vapeur d'eau (de masse molaire $M_\text{v} = 18\,\text{g.mol}^{-1}$).
On définit l'*humidité absolue* par le rapport

$$w = \frac{m_\text{v}}{m_\text{a}}\,.$$

On note P_a et P_v les pressions partielles respectives de l'air sec et de la vapeur d'eau. On définit alors l'*humidité relative* par

$$h = \frac{P_\text{v}}{P_s(T)}\ ,$$

où $P_s(T)$ est la pression de vapeur saturante de l'eau à la température T (représentée ci-dessous entre 0°C et 25°C).

1. Justifier succinctement que $P_A = P_\text{a} + P_\text{v}$, puis rappeler les équations d'état reliant la pression partielle à la masse de gaz, respectivement pour l'air sec et la vapeur d'eau.

2. Montrer que

$$w = \delta\,\frac{P_\text{v}}{P_A - P_\text{v}}\ ,$$

où δ est une constante dont on donnera l'expression en fonction des masses molaires M_a et M_v.

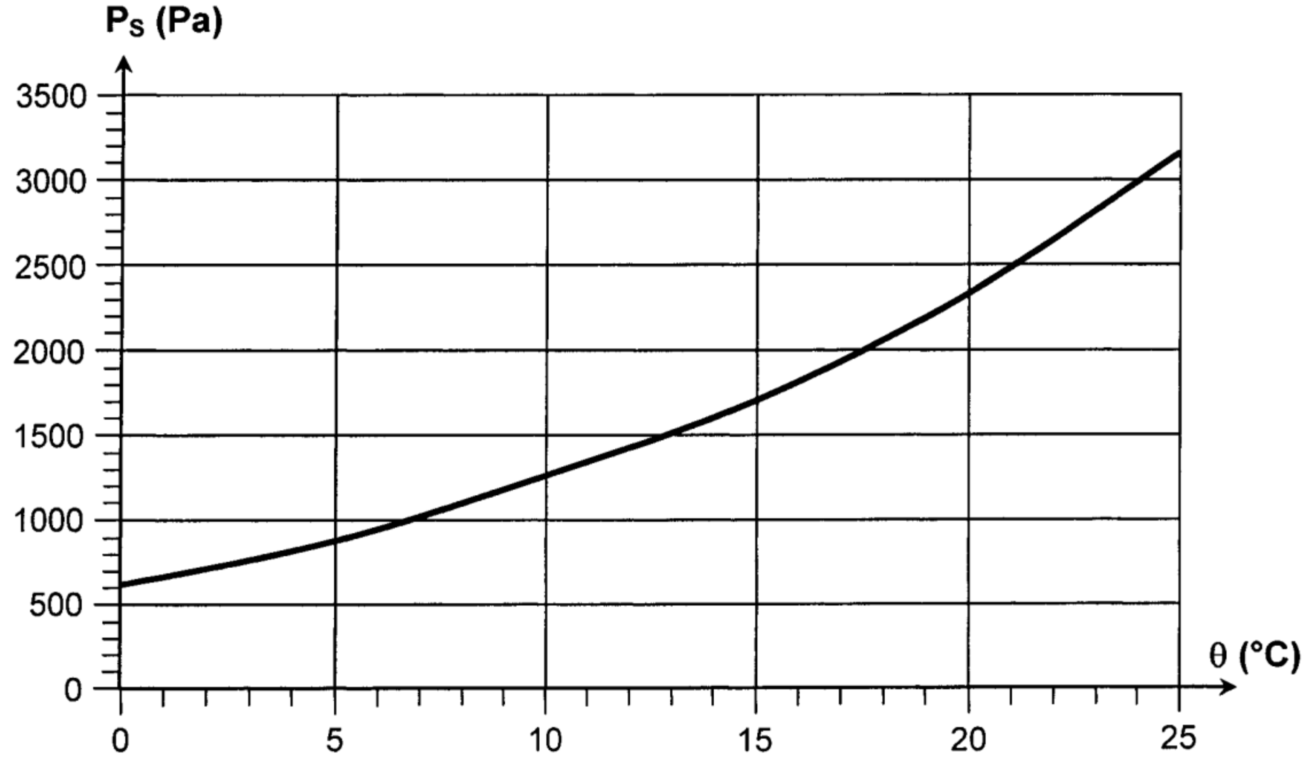
3. La température et la pression étant fixées, déterminer la valeur maximale w_M de l'humidité absolue à l'équilibre thermodynamique en fonction de $P_s(T)$ notamment.
Application numérique : en utilisant le graphique ci-dessous, calculer w_M pour $\theta = 25$°C.

4. Comment évolue w_M lors une augmentation isobare de température, puis lors d'une augmentation isotherme de pression ?

1. Un second hygromètre, par mesure de *capacité* électrique, est présenté dans le sujet original.

5. L'intérieur d'un local de volume $V = 350\,\mathrm{m}^3$ est à la température $\theta_1 = 25°\mathrm{C}$, sous la pression atmosphérique P_A. Son humidité relative est $h = 0,40$. Calculer les masses m_v de vapeur d'eau, m_a d'air sec ainsi que la masse totale m_h d'air humide.

6. Durant la nuit, le local n'est pas chauffé et sa température descend à $\theta_2 = 5°\mathrm{C}$. Quelle est alors l'humidité relative h de l'atmosphère du local, si ce dernier est hermétiquement clos, sous pression constante ? Quelle est la masse m_e d'eau qui s'est liquéfiée ?



Pression de vapeur saturante de l'eau en fonction de la température.

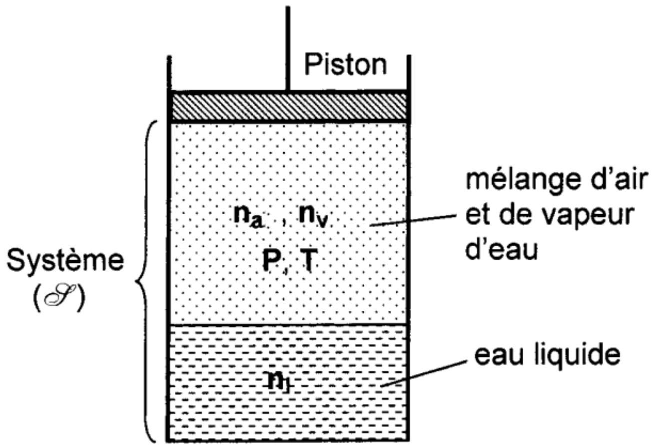
Considérons un volume d'air humide à la température T et la pression P_A, caractérisé par une humidité absolue w. La *température de rosée* T_R est la température à laquelle il faut refroidir cet air à pression constante pour faire apparaître la première goutte d'eau liquide, si l'équilibre thermodynamique est atteint.

7. Quelle est la température de rosée T_R (ou θ_R) de l'air contenu dans le local étudié en **5.** ?

8. Une lame métallique en contact avec de l'air humide est refroidie progressivement sous la pression constante P_A. Il apparaît de la buée à la surface de la lame lorsque la température de celle-ci est descendue à $8,0°\mathrm{C}$. En déduire les humidités relative h et absolue w de cet air lorsqu'il est à la température de $25°\mathrm{C}$.

I.2. Évolution et équilibre en vase clos

Considérons un système fermé ($\mathcal{S}$) formé d'une part de n_ℓ moles d'eau liquide (de masse m_ℓ) à la température T et à la pression P, et d'autre part d'une phase gazeuse à la même température et sous la même pression, renfermant dans un volume V n_a moles d'air sec (de masse m_a) et n_v moles de vapeur d'eau (de masse m_v, figure ci-contre).



On suppose que l'équilibre en pression et en température avec l'atmosphère extérieure $P = P_A$ et $T = T_A$ est établit (piston sans masse et sans frottements, parois diathermes). La pression partielle P_v est quelconque et le système pas nécessairement à l'équilibre thermodynamique.

On souhaite démontrer que l'évolution spontanée du système consiste à se rapprocher autant que possible d'une pression partielle en vapeur d'eau égale à la pression de vapeur saturante, $P_{\mathrm{v}} = P_s(T_A)$, état qui correspond à l'équilibre thermodynamique pour le système $(\mathcal{S})$. Pour cela on considère une transformation infinitésimale isobare ($P = P_A$) et isotherme ($T = T_A$) du système global $(\mathcal{S})$, au cours de laquelle une petite masse $\mathrm{d}m_{\mathrm{v}} > 0$ passe de l'état liquide à l'état gaz (on pourra considérer $\mathrm{d}m_{\mathrm{v}} < 0$ pour le passage de l'état gaz à l'état liquide).

9. Montrer que le transfert thermique reçu par $(\mathcal{S})$ en provenance du milieu extérieur s'écrit

$$\delta Q = \ell_v \,.\, \mathrm{d}m_{\mathrm{v}} \,,$$

où ℓ_v est l'enthalpie massique de vaporisation de l'eau à la température T_A. On pourra si besoin introduire les enthalpies massiques des différents constituants.

10. On cherche maintenant à expliciter la variation élémentaire d'entropie $\mathrm{d}S$ de $(\mathcal{S})$.

a) En partant d'un état de référence à la pression P_A et la température T_A d'entropie massique $s_{v\,A}$ supposée connue, montrer que l'entropie massique s_{v} de la vapeur d'eau à la pression P_{v} et la température T_A vérifie

$$s_{\mathrm{v}} = s_{\mathrm{v\,A}} - \frac{R}{M_{\mathrm{v}}} \ln\left(\frac{P_{\mathrm{v}}}{P_A}\right) .$$

Faire de même pour l'entropie massique s_{a} de l'air sec à la pression P_{a} et la température T_A, en partant d'un état de référence à la pression P_A et la température T_A d'entropie massique notée $s_{a\,A}$ supposée connue.

b) Sachant que $P_A = P_{\mathrm{a}} + P_{\mathrm{v}}$, comment sont reliées entre elles les variations élémentaires $\mathrm{d}P_{\mathrm{a}}$ et $\mathrm{d}P_{\mathrm{v}}$?

c) L'entropie massique s_ℓ de l'eau varie-t-elle dans les conditions de la transformation ?
En déduire que

$$\mathrm{d}S = \left(s_{\mathrm{v\,A}} - \frac{R}{M_{\mathrm{v}}} \ln\left(\frac{P_{\mathrm{v}}}{P_A}\right) - s_\ell\right) .\, \mathrm{d}m_{\mathrm{v}} \,.$$

11. En appliquant le second principe de la thermodynamique, en déduire que l'entropie créée élémentaire δS_c est elle aussi proportionnelle à $\mathrm{d}m_{\mathrm{v}}$ et expliciter cette relation à l'aide des précédentes.

12. Lorsque le système $(\mathcal{S})$ est au voisinage de son état d'équilibre thermodynamique, un changement infinitésimal ne créée pas d'entropie[2] : $\frac{\delta S_c}{\mathrm{d}m_{\mathrm{v}}} = 0$.
En déduire que

$$\delta S_c = -\frac{R}{M_{\mathrm{v}}} \ln\left(\frac{P_{\mathrm{v}}}{P_s(T_A)}\right) .\, \mathrm{d}m_{\mathrm{v}} \,,$$

et conclure sur le sens d'évolution du système selon que $P_{\mathrm{v}} < P_s(T_A)$ ou que $P_{\mathrm{v}} > P_s(T_A)$.

13. La température du thermostat est $\theta_A = 60°\mathrm{C}$, température pour laquelle la pression de vapeur saturante vaut $P_s(\theta_A) = 1,98 \times 10^4\,\mathrm{Pa}$. On introduit initialement les quantités de matière $n_{\ell 0}$ en eau liquide, $n_{\mathrm{v}0}$ en eau vapeur, et $n_{\mathrm{a}0}$ en air sec.

a) Établir l'expression de la quantité finale d'eau liquide n_ℓ dans l'hypothèse où l'équilibre thermodynamique est atteint.

b) Calculer la composition finale de $(\mathcal{S})$ en moles lorsque les quantités de matière initiales sont

i. $n_{\ell 0} = 0,20\,\mathrm{mol}$, $n_{v0} = 0,20\,\mathrm{mol}$, $n_{\mathrm{a}0} = 1,5\,\mathrm{mol}$;

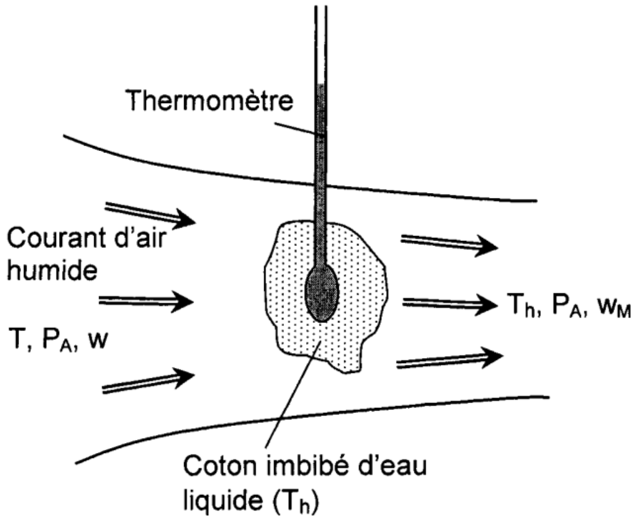
ii. $n_{\ell 0} = 0,12\,\mathrm{mol}$, $n_{v0} = 0,15\,\mathrm{mol}$, $n_{\mathrm{a}0} = 1,5\,\mathrm{mol}$;

2. car par l'absurde, sinon il aurait une évolution spontanée (irréversible) et donc ne serait pas à l'équilibre.

I.3. Mesure de l'humidité à l'aide du psychromètre

Un psychromètre est un appareil destiné à mesurer l'humidité de l'air par la mesure d'une différence de température entre deux thermomètres.

La pointe d'un thermomètre, entourée d'un coton imbibé d'eau liquide, est placée dans un courant d'air humide (cf figure ci-contre). Cela a pour effet de provoquer l'évaporation du liquide et l'enrichissement de la phase gazeuse en vapeur d'eau.
La température de l'eau liquide (indiquée par le thermomètre) est constante et vaut T_h (*température humide*). Initialement, l'air humide est à la température T et possède une humidité absolue w. Après son passage sur le coton, cet air est saturé en vapeur d'eau et son humidité absolue devient w_M. Sa température est alors T_h.



La transformation s'effectue sous la pression atmosphérique constante $P_A = 1,013\,\text{bar}$, et l'écoulement est supposé stationnaire. On note $c_{p\,\text{a}}$ et $c_{p\,\text{v}}$ les capacités thermiques à pression constante de l'air sec et de la vapeur d'eau respectivement, et $\ell_v(T)$ l'enthalpie massique de vaporisation à la température T.

On définit le système $(\mathcal{S})$ par une portion de l'air humide s'écoulant en aval du coton à un certain instant. Il est constitué

- d'une masse m_a d'air sec qui a passé à proximité du coton ;
- d'une masse m_v de vapeur d'eau présente avant et après le passage près du coton ;
- d'une masse m_ev d'eau, présente d'abord sous forme de liquide dans le coton, puis ensuite sous forme de vapeur dans l'écoulement d'air humide.

Dans la suite on considère la transformation conduisant $(\mathcal{S})$ de son état initial à son état final comme définis ci-dessus. On ne cherchera pas à établir ni utiliser le premier principe dit « industriel ».

14. Établir l'expression de m_v et m_ev en fonction de m_a, w et w_M.

15. Montrer que cette transformation est isenthalpique.

16. En déduire que

$$(w_M - w)\,\ell_v(T_h) = (c_{p\,\text{a}} + w c_{p\,\text{v}}).(T - T_h)\,.$$

17. En déduire, en utilisant la question **3.**, que

$$w = \frac{\delta \frac{P_s(T_h)}{P_A - P_s(T_h)}\,\ell_v(T_h) - c_{p\,\text{a}}(T - T_h)}{\ell_v(T_h) + c_{p\,\text{v}}(T - T_h)}\,.$$

En réalité, la variation de température n'excède pas quelques degrés. Compte tenu des différents ordres de grandeur on peut alors simplifier l'équation précédente ainsi :

$$w = \delta \frac{P_s(T_h)}{P_A - P_s(T_h)}\Big(1 - A(T - T_h)\Big) \quad \text{avec} \quad A \approx 6,6 \times 10^{-2}\,\text{K}^{-1}\,.$$

18. En déduire que l'on peut obtenir, moyennant une petite approximation, l'humidité relative via la relation

$$h \approx \frac{P_s(T_h)}{P_s(T)}\Big(1 - A(T - T_h)\Big)\,.$$

19. Une mesure particulière a donné pour l'air d'un local : $T_h = 280\,\text{K}$ et $T = 288\,\text{K}$. Calculer l'humidité relative h de cet air, en utilisant la courbe de $P_s(\theta)$ représentée en partie I.1.

II. Production d'un rayonnement synchrotron

On étudie un des dispositifs utilisés pour produire ce qu'on nomme le « rayonnement synchrotron ». On négligera le poids dans tout le problème. On considérera, sauf mention explicite du contraire, que les électrons sont non relativistes, en mouvement dans un vide suffisamment poussé pour qu'on puisse négliger tout frottement.

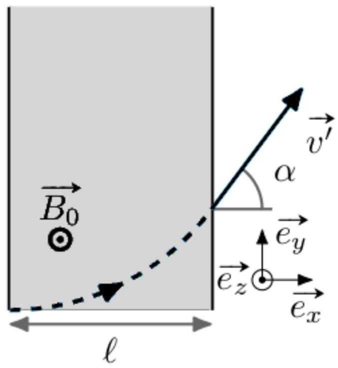
Données :

- charge d'un électron $q = -e = -1,6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$;
- masse d'un électron $m = 9,1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$;
- vitesse de la lumière $c = 3,0 \times 10^{8}\,\mathrm{m.s^{-1}}$;
- permittivité diélectrique du vide $\varepsilon_0 = 8,9 \times 10^{-12}\,\mathrm{F.m^{-1}}$;
- constante de Planck $h = 6,63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J.s}$.

II.1. Propriétés générales

1. Établir rapidement la nature et les caractéristiques de la trajectoire d'un électron dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}_0$, si son vecteur vitesse initial $\vec{v}_0$ est orthogonal à $\vec{B}_0$.
On précisera en particulier une distance R et une pulsation ω_c caractéristiques en fonction de v_0, B_0, de la charge e et de la masse m de l'électron.

2. Un électron pénètre (au point $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$) avec la vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$ (avec $v_0 > 0$) dans une zone où règne un champ $\vec{B}_0 = B_0\vec{e}_z$ (avec $B_0 > 0$) uniforme. Cette zone est limitée à $x \in [0, \ell]$.

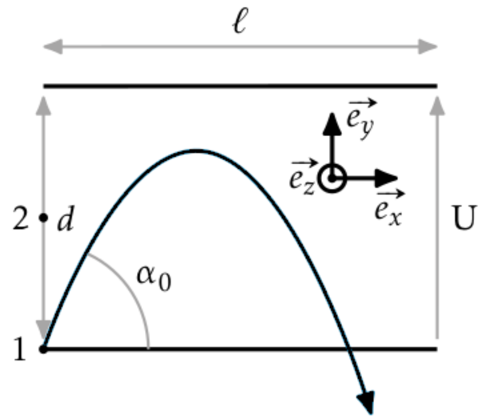


a) Déterminer, si possible géométriquement, à quelle condition portant sur v_0 l'électron peut atteindre le plan $x = \ell$. Quelle sera alors la norme de son vecteur vitesse $\vec{v}'$?
On suppose cette condition remplie dans toute la suite.

b) Déterminer, si possible géométriquement, l'angle α entre le vecteur vitesse $\vec{v}'$ et $\vec{e}_x$ quand l'électron est dans le plan $x = \ell$.

3. On envisage une configuration utilisant un champ électrique uniforme $\vec{E}_0$ pour produire la même déflexion. On applique pour cela une tension U entre deux grilles métalliques distantes de d. La longueur des grilles selon $\vec{e}_x$ est ici aussi notée ℓ.

On considère le cas d'un électron rentrant dans le dispositif en $x = 0$, $y = 0$ (position 1 sur la figure ci-contre), avec un vecteur vitesse initial $\vec{v}_0$ (contenu dans le plan xOy) et formant l'angle α_0 avec l'axe $\vec{e}_x$.



a) Quel doit être le signe de la tension U pour que l'électron puisse ressortir du dispositif par la grille par laquelle il est entré ?
On suppose cette condition vérifiée dans toute la suite.

b) Établir les équations $x(t)$ et $y(t)$ du mouvement de l'électron tant qu'il est entre les deux grilles. En déduire à quelle condition portant sur la norme v_0 il peut atteindre la grille inférieure avant de sortir du dispositif pour $x > \ell$. On suppose cette condition réalisée par la suite.

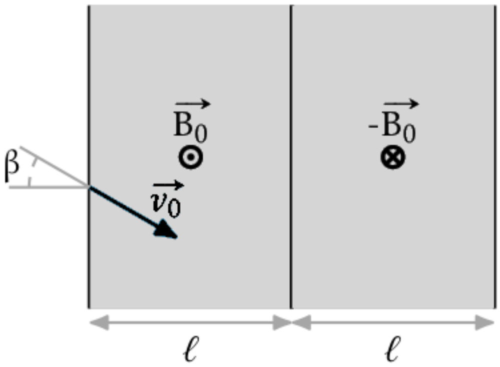
c) Déterminer la norme et la direction de son vecteur vitesse $\vec{v}'$ quand il repasse par la grille inférieure.

d) Déterminer la norme et la direction du vecteur $\vec{v}'$ s'il est rentré dans le dispositif au point $x = 0$, $y = d/2$ (position 2 sur la figure). On ne se préoccupera pas de préciser la nouvelle valeur maximale de la vitesse v_0 pour laquelle l'électron ressort par la grille inférieure.

II.2. Mouvements dans des champs magnétiques alternés

Un onduleur est un dispositif dans lequel le champ magnétique change périodiquement de sens dans la direction $\vec{e}_x$. On le modélise ici, par souci de simplicité, par des zones de largeur ℓ selon $\vec{e}_x$ dans lesquelles le champ magnétique est uniforme : il vaut $+B_0\vec{e}_z$ dans les cellules paires et $-B_0\vec{e}_z$ dans les cellules impaires. Il est constitué par la juxtaposition d'un grand nombre de cellules comme celle représentée ci-contre.

On injecte en $x = 0$, $y = 0$ des électrons de vitesse initiale $\vec{v}_0$, de norme v_0, formant un angle β avec $\vec{e}_x$.



4. Déterminer la trajectoire des électrons dans l'ensemble du dispositif quand le vecteur $\vec{v}_0$ est selon $\vec{e}_x$ (ie $\beta = 0$).

5. En déduire l'angle β à donner au vecteur vitesse $\vec{v}_0$ pour que les électrons oscillent autour de l'axe $(y = 0; z = 0)$. On l'exprimera en fonction de ℓ, e, B_0, m, v_0. On suppose cette condition réalisée par la suite.

6. Vous paraît-il réalisable d'obtenir la même propriété en utilisant des zones de champ électrique comme celles de la question **3.** ?

7. Déterminer l'expression du temps mis par l'électron pour traverser une zone de champ magnétique uniforme de longueur ℓ en fonction de v_0, ℓ et de l'angle β.
En déduire l'expression de sa vitesse moyenne selon $\vec{e}_x$, notée v_x, en fonction des mêmes grandeurs.
Donner également l'expression de la norme de son vecteur accélération au cours du mouvement en fonction de ℓ, e, B_0, m, v_0.

II.3. Puissance rayonnée

Une particule chargée animée d'un mouvement accéléré émet un rayonnement électromagnétique. La puissance de l'onde émise par une charge q subissant accélération $\vec{a}$, a pour expression dans le cas non relativiste :

$$\mathcal{P} = \frac{q^2\vec{a}^{\,2}}{6\pi\varepsilon_0 c^3}$$

avec ε_0 la permittivité diélectrique du vide et c la vitesse de la lumière.

8. Déterminer l'expression de la puissance rayonnée par un électron dans l'onduleur en fonction de e, B_0, v_0, m, c, ε_0.

9. On considère un onduleur typique, dont les paramètres sont les suivants : $B_0 = 1,0 \times 10^{-1}\,\mathrm{T}$, longueur d'un élément $\ell = 4,0\,\mathrm{cm}$ et des électrons relativistes tels que $v_0 \approx c$. Que peut-on dire de l'angle β défini à la question **5.** si l'on suppose la relation toujours valable pour le cas relativiste ?

En fait, dans le cas relativiste, le principe fondamental de la dynamique s'écrit toujours

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{F} \quad \text{mais avec} \quad \vec{p} = \gamma m\vec{v} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,,$$

où $\vec{F}$ est l'expression classique de la force. On doit aussi modifier l'expression de l'énergie cinétique, qui s'écrit : $E_c = (\gamma - 1)mc^2$.

10. Montrer comment doit être adaptée l'expression de l'angle β de la question **5.**, et calculer sa valeur si l'énergie cinétique E_c des électrons est 2,5 GeV.

11. Dans le cas relativiste, la puissance rayonnée par un électron dans un mouvement circulaire uniforme de rayon R est :

$$\mathcal{P} = \frac{q^2 c\gamma^4}{6\pi\varepsilon_0 R^2}\,.$$

Calculer la valeur de $\mathcal{P}$ pour les paramètres précédents.

Le mouvement de l'électron étant périodique (en première approximation), il émet des photons identiques à chaque entrée dans une nouvelle cellule paire (ou impaire), c'est-à-dire à chaque fois qu'il a parcouru une distance 2ℓ. On peut montrer qu'il en découle un phénomène d'interférence, dont la condition d'interférence constructive s'écrit (dans le cas non relativiste) :

$$\left(\frac{c}{v_x} - 1\right) = n.\frac{\lambda}{2\ell} \quad \text{avec} \quad n \quad \text{entier positif.}$$

12. Déterminer la plus grande longueur d'onde, notée λ_0, pour laquelle les interférences sont constructives, en admettant que cette formule est valable dans le cas relativiste. On effectuera l'approximation $v_x \approx v_0$ après avoir justifié sa validité.
Calculer sa valeur et préciser le domaine de longueur d'onde correspondant.

13. En admettant que l'essentiel de la puissance est émis sous forme d'un rayonnement de longueur d'onde λ_0, calculer également le nombre de photons émis par seconde par un électron.

* * * Fin de l'épreuve * * *