MÉCANIQUE

I. Lancement d'un satellite *(d'après CCP 2008)*

1. **a)** Pour une orbite circulaire de rayon R, le PFD appliqué dans $\mathcal{R}_G$ au satellite s'écrit $-m\frac{v^2}{R}\overrightarrow{e_r} = -\frac{\mathcal{G}mM}{R^2}\overrightarrow{e_r}$, ce qui mène à $\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{g_0 R}}$.

b) La période d'un mouvement circulaire uniforme vérifie $T_0 = \frac{2\pi R}{v_0}$ d'où $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g_0}}}$.

c) Le mouvement de la Terre étant uniforme de période T, la vitesse d'un point de l'équateur est $v_E = \frac{2\pi R}{T}$, d'où $\boxed{q = \frac{4\pi^2 R}{g_0 T^2}} \approx \underline{3,5\,10^{-3}} \ll 1$.

2. **a)** $g(z) = \frac{\mathcal{G}M}{(R+z)^2} = \boxed{g_0\frac{R^2}{(R+z)^2}}$.

b) La période de révolution du satellite doit être celle de la rotation propre de la Terre, pour qu'il soit géostationnaire. On réutilise le résultat de la question **1.b)** pour cette nouvelle orbite, de rayon $R+z = R_1$ et de période T : $T = 2\pi\sqrt{\frac{R+z}{g(z)}} = 2\pi\sqrt{\frac{R_1^3}{g_0 R^2}}$, ce qui mène à $\boxed{R_1 = \left(g_0\frac{R^2T^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}}$.

On en déduit $\boxed{x = \frac{R_1}{R} = \left(\frac{g_0 T^2}{4\pi^2 R}\right)^{\frac{1}{3}}} \approx \underline{6,6}$. Ce résultat aurait pu être retrouvé via la loi de Kepler.

c) Cette fois on se sert de la question **1.a)** pour l'orbite C_1, ce qui donne $v_1 = \sqrt{g(z)\,(R+z)} = \sqrt{g_0\frac{R^2}{(R+z)}} = \sqrt{g_0 R\,\frac{R}{R_1}}$ d'où $\boxed{v_1 = \frac{v_0}{\sqrt{x}}}$.

d) Le travail W que doivent produire les propulseurs est donné par le théorème de l'énergie mécanique appliqué dans $\mathcal{R}_G$, et correspond au travail des forces non conservatives. L'état final correspond à l'énergie mécanique sur l'orbite C_1, soit $E_{m\,1} = -\frac{k}{2R_1}$ en posant $k = \mathcal{G}Mm$. L'état initial correspond à l'énergie mécanique du satellite au repos sur la surface terrestre, donc en mouvement de rotation à une vitesse inférieure à v_E. Or on a $v_1 = \frac{v_0}{\sqrt{x}} \approx 0,4\,v_0$, et $v_0 \gg v_E$, donc $v_1 \gg v_E$ et on peut négliger l'énergie cinétique dans l'état initial devant celle de l'état final :

$$W = E_{m\,1} - E_{m\,\text{surface}} \approx E_{m1} - E_{p\,0} = -\frac{k}{2R_1} + \frac{k}{R} = \frac{k}{R}\left(1 - \frac{R}{2R_1}\right) = \frac{\mathcal{G}Mm}{R}\left(1 - \frac{1}{2x}\right)$$

D'autre part on a $K_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{\mathcal{G}Mm}{2R}$ d'après **1.a)**, d'où : $\boxed{W = K_0\left(2 - \frac{1}{x}\right)}$

3. **a)** Pour la phase 1, il n'y a pas de variation d'énergie potentielle, et de nouveau on néglige la vitesse initiale due à la rotation terrestre. Donc

$$W_1 = E_{m\,0} - E_{m\,\text{surface}} \approx E_{m\,0} - E_{p\,0} = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad \text{d'où} \quad \boxed{W_1 = K_0}.$$

b) Sur l'orbite elliptique, l'énergie mécanique vérifie au point P : $E_{m\,0,1} = \frac{1}{2}mv_0'^2 - \frac{k}{R}$. Par ailleurs cette ellipse est de grand-axe $R + R_1$, donc on peut aussi écrire $E_{m\,0,1} = -\frac{k}{(R+R_1)}$. Ces deux relations mènent à

$$\frac{1}{2}mv_0'^2 = \frac{k}{R}\left(1 - \frac{R}{R+R_1}\right) = \frac{k}{R}\left(1 - \frac{1}{1+x}\right) = \frac{k}{R}\,\frac{x}{1+x}$$

Or $mv_0^2 = \frac{k}{R}$, ce qui donne $\boxed{v_0' = v_0\sqrt{\frac{2x}{1+x}}}$.

c) De nouveau le théorème de l'énergie mécanique nous donne le travail à produire par les propulseurs pour la phase 2 :

$$W_2 = E_{m\,0,1} - E_{m\,0} = -\frac{k}{R+R_1} + \frac{k}{2R} = \frac{k}{2R}\left(1 - \frac{2}{1+x}\right) \quad \text{d'où} \quad \boxed{W_2 = K_0\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}.$$

d) Les vitesses au périgée P et à l'apogée A sont orthoradiales, et donc reliées par la constante des aires : $C = Rv_0' = R_1 v_1'$, et donc $v_1' = v_0'/x$. D'après la question **3.b)** on obtient $\boxed{v_1' = v_0\sqrt{\frac{2}{x(1+x)}}}$.

e) Pour la phase 3, on obtient

$$W_3 = E_{m\,1} - E_{m\,0,1} = -\frac{k}{2R_1} + \frac{k}{R+R_1} = \frac{k}{2R}\left(\frac{2}{1+x} - \frac{1}{x}\right) \quad \text{d'où} \quad \boxed{W_3 = K_0\,\frac{x-1}{x(x+1)}}.$$

En faisant la somme des travaux des propulseurs pour les 3 étapes, on obtient

$$W_1 + W_2 + W_3 = K_0\left(1 + \frac{x-1}{x+1} + \frac{x-1}{x(x+1)}\right) = ... = K_0\left(2 - \frac{1}{x}\right) \quad \text{d'où} \quad \boxed{W_1 + W_2 + W_3 = W},$$

ce qui est normal car la variation totale d'énergie mécanique est la même que l'on envoie le satellite directement sur C_1 depuis la surface, ou qu'on le fasse en trois étapes.

f) La période de révolution sur l'ellipse est $2\Delta t$, et le demi-grand-axe est $\frac{1}{2}(R + R_1)$. En utilisant aussi l'orbite C_1 on obtient

$$\frac{2^3(2\Delta t)^2}{(R+R_1)^3} = \frac{T^2}{R_1^3} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\Delta t = \frac{T}{2^{5/2}}\left(\frac{1}{x} + 1\right)^{\frac{3}{2}}} = \underline{5\,\text{h}\,14\,\text{min}}$$

4. **a)** La densité de l'atmosphère diminuant avec l'altitude, le coefficient de frottement atmosphérique diminue également, ce qui se traduit par une dépendance en $\frac{1}{z}$ de la force.

b) La force de frottement étant faible devant la force de gravitation, les calculs précédents sont valables sur une révolution. On peut donc réutiliser les résultats intermédiaires obtenus en **2.b)** et **2.c)** respectivement :

$$T_S(z) = 2\pi\sqrt{\frac{R+z}{g(z)}} = \boxed{2\pi\sqrt{\frac{(R+z)^3}{g_0 R^2}}} \quad \text{et} \quad v(z) = \sqrt{g(z)\,(R+z)} = \boxed{\sqrt{g_0\frac{R^2}{(R+z)}}}$$

c) Pour de petites variations, on peut différencier les relations précédentes :

$$\Delta v \approx \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}\,\Delta z = -\frac{1}{2}\sqrt{g_0\frac{R^2}{(R+z)^3}}\,\Delta z \quad \text{d'où} \quad \boxed{\Delta v = -\frac{\pi}{T_S}\,\Delta z}.$$

Ainsi, la vitesse croît si le satellite se rapproche de la Terre, et vice versa.

d) Le théorème scalaire du moment cinétique selon l'axe Oz orthogonal au plan du mouvement s'écrit : $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = -\frac{\lambda m}{z}\,v^2\,(R+z)$. En remplaçant par l'expression de $v(z)$ (**4.b)**), on obtient $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = -\frac{\lambda m}{z}\,g_0 R^2$. Le moment cinétique décroît au cours du temps, d'autant plus vite qu'il est proche de la Terre car les frottements augmentent. En intégrant sur une période de révolution on obtient donc $\boxed{\Delta\sigma = -\frac{\lambda m}{z}\,g_0 R^2\,T_S}$.

e) Par ailleurs on calcule $\sigma(z) = mv(z)\,(R+z) = mR\,\sqrt{g_0(R+z)}$. En différenciant, on obtient

$$\boxed{\Delta\sigma = \frac{mR\sqrt{g_0}}{2\sqrt{R+z}}\,\Delta z}.$$

Comme $\Delta\sigma < 0$, on a $\Delta z < 0$. Le satellite se rapproche donc de la Terre à cause des frottements.

II. Motocyclette *(d'après CCP MP 2013)*

II.1. Démarrage

1. Le Théorème de la Résultante Cinétique (TRC) appliqué au système { moto + conducteur } dans $\mathcal{R}$ galiléen s'écrit $M\dot{v}\vec{e}_x = \vec{N}_1 + \vec{T}_1 + \vec{N}_2 + \vec{T}_2 + M\vec{g}$, d'où après projection :

$$\boxed{M\dot{v} = T_1 + T_2} \qquad (1) \qquad\qquad \boxed{Mg = N_1 + N_2} \qquad (2)$$

2. La route étant fixe dans $\mathcal{R}$, on écrit que la vitesse de la roue au point de contact est nulle en l'absence de glissement. D'après le champ des vitesses dans un solide pour la roue $i = 1$ ou 2 on obtient :

$$\vec{v}_{I_i} = \vec{v}_{O_i} + \omega_i\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{O_iI_i} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{0} = v\vec{e}_x + R_i\omega_i\vec{e}_x\,.$$

Après projection on obtient

$$\boxed{\omega_1 = -\frac{v}{r_1}} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega_2 = -\frac{v}{r_2}}.$$

3. On applique la définition et le champ des vitesses dans un solide en notant M_i les N points d'une roue, et $(\vec{e}_{r_i}, \vec{e}_{\theta_i})$ la base polaire associée :

$$\vec{\sigma}_1(O_1) = \sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{O_1M_i}\wedge m_i\vec{v}_{M_i} = \sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{O_1M_i}\wedge m_i\left(\vec{v}_{O_1} + \omega_1\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{O_1M_i}\right) = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\overrightarrow{O_1M_i}\right)\wedge\vec{v}_{O_1} + \sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{O_1M_i}\wedge\left(\omega_1\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{O_1M_i}\right)$$

Or O_1 est le barycentre de la roue donc $\sum_i m_i\overrightarrow{O_1M_i} = \vec{0}$, d'où

$$\vec{\sigma}_1(O_1) = \sum_{i=1}^{N} O_1M_i\vec{e}_{r_i} \wedge (\omega_1\vec{e}_z \wedge O_1M_i\vec{e}_{r_i}) = \omega_1\sum_{i=1}^{N} m_iO_1M_i^2\vec{e}_{r_i}\wedge\vec{e}_{\theta_i} = \omega_1\left(\sum_{i=1}^{N} m_iO_1M_i^2\right)\vec{e}_z\,.$$

En appliquant le même raisonnement pour la roue 2 on obtient finalement

$$\boxed{\vec{\sigma}_1(O_1) = J_1\omega_1\vec{e}_z} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{\sigma}_2(O_2) = J_2\omega_2\vec{e}_z}.$$

4. On décompose le système en { roue 1 + roue 2 + reste }, le reste étant un solide en translation à la vitesse $v\vec{e}_x$ et de centre de masse noté G_0, et on utilise les propriétés des barycentres partiels :

$$\begin{aligned}
\vec{\sigma}(G) &= \sum_{i\in\text{roue 1}}\left(\overrightarrow{GO_1} + \overrightarrow{O_1M_i}\right)\wedge m_i\vec{v}_{M_i} + \sum_{i\in\text{roue 2}}\left(\overrightarrow{GO_2} + \overrightarrow{O_2M_i}\right)\wedge m_i\vec{v}_{M_i} + \left(\sum_{i\in\text{reste}} m_i\overrightarrow{GM_i}\right)\wedge v\vec{e}_x\\
&= \overrightarrow{GO_1}\wedge\left(\sum_{i\in\text{roue 1}} m_i\vec{v}_{M_i}\right) + \vec{\sigma}_1(O_1) + \overrightarrow{GO_2}\wedge\left(\sum_{i\in\text{roue 2}} m_i\vec{v}_{M_i}\right) + \vec{\sigma}_2(O_2) + \left(\sum_{i\in\text{reste}} m_i\overrightarrow{GM_i}\right)\wedge v\vec{e}_x\\
&= \vec{\sigma}_1(O_1) + \vec{\sigma}_2(O_2) + \overrightarrow{GO_1}\wedge m_{\text{roue 1}}\,\vec{v}_{O_1} + \overrightarrow{GO_2}\wedge m_{\text{roue 2}}\,\vec{v}_{O_2} + m_{\text{reste}}\,\overrightarrow{GG_0}\wedge v\vec{e}_x\\
&= \vec{\sigma}_1(O_1) + \vec{\sigma}_2(O_2) + \left(m_{\text{roue 1}}\overrightarrow{GO_1} + m_{\text{roue 2}}\overrightarrow{GO_2} + m_{\text{reste}}\overrightarrow{GG_0}\right)\wedge v\vec{e}_x\\
&= \vec{\sigma}_1(O_1) + \vec{\sigma}_2(O_2) + \vec{0}\wedge v\vec{e}_x \qquad \text{d'où}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{\sigma}(G) = \vec{\sigma}_1(O_1) + \vec{\sigma}_2(O_2)}.$$

5. Le Théorème du Moment Cinétique (TMC) appliqué à la roue 1 en O_1 s'écrit

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_1(O_1)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{\mathcal{M}}_{\text{pes}}(O_1) + \vec{\mathcal{M}}_{\text{contact}}(O_1) + \vec{\mathcal{M}}_{\text{pivot}}(O_1)$$

La pesanteur a pour point d'application O_1 et les forces de réaction ont pour point d'application I_1 car le contact est supposé ponctuel ·

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_1(O_1)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{O_1O_1}\wedge m_{\text{roue1}}\,\vec{g} + \overrightarrow{O_1I_1}\wedge\left(\vec{T}_1 + \vec{N}_1\right) + \vec{\mathcal{M}}_{\text{pivot}}(O_1) = \vec{0} + r_1T_1\vec{e}_z + \vec{0} + \vec{\mathcal{M}}_{\text{pivot}}(O_1)$$

On projette selon $\vec{e}_z$, et on utilise la condition de non glissement $\omega_1 = -\frac{v}{r_1}$ d'une part, et que la liaison pivot est parfaite d'autre part, donc $\vec{e}_z.\vec{\mathcal{M}}_{\text{pivot}}(O_1) = 0$, d'où

$$\boxed{-\frac{J_1}{r_1}\dot{v} = r_1T_1} \Leftrightarrow \boxed{T_1 = -\frac{J_1}{r_1^2}\dot{v}}. \qquad (3)$$

6. De même on applique le TMC en G au système total. Les actions extérieures se réduisent maintenant au poids et aux actions de contact, qui ont toutes un point d'application :

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}(G)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{\sigma}_1(O_1) + \vec{\sigma}_2(O_2)\right)\right|_{\mathcal{R}} = \vec{\mathcal{M}}_{\text{pes}}(G) + \vec{\mathcal{M}}_{\text{contact}}(G)\\
&= \overrightarrow{GG}\wedge M\vec{g} + \overrightarrow{GI_1}\wedge\left(\vec{T}_1 + \vec{N}_1\right) + \overrightarrow{GI_2}\wedge\left(\vec{T}_2 + \vec{N}_2\right)\\
J_1\dot{\omega}_1\vec{e}_z + J_2\dot{\omega}_2\vec{e}_z &= \vec{0} + (d_1\vec{e}_x - h\vec{e}_y)\wedge(T_1\vec{e}_x + N_1\vec{e}_y) + (-d_2\vec{e}_x - h\vec{e}_y)\wedge(T_2\vec{e}_x + N_2\vec{e}_y)
\end{aligned}$$

Après projection selon $\vec{e}_z$ et injection des conditions de non glissement cela donne :

$$\boxed{-\left(\frac{J_1}{r_1} + \frac{J_2}{r_2}\right)\dot{v} = d_1N_1 - d_2N_2 + h(T_1 + T_2)} \qquad (4)$$

7. L'Eq. (3) et l'Eq. (1) nous conduisent à

$$\boxed{T_1 = -\frac{J_1}{r_1^2}\dot{v}} \quad \text{et} \quad \boxed{T_2 = \left(M + \frac{J_1}{r_1^2}\right)\dot{v}}.$$

En injectant l'Eq. (1) dans l'Eq. (4) on obtient

$$-\left(hM + \frac{J_1}{r_1} + \frac{J_2}{r_2}\right)\dot{v} = d_1N_1 - d_2N_2$$

qui associée à l'Eq. (2) conduit à

$$\boxed{N_1 = \frac{d_2}{d_1 + d_2}Mg - \frac{\dot{v}}{d_1 + d_2}\left(hM + \frac{J_1}{r_1} + \frac{J_2}{r_2}\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{N_2 = \frac{d_1}{d_1 + d_2}Mg + \frac{\dot{v}}{d_1 + d_2}\left(hM + \frac{J_1}{r_1} + \frac{J_2}{r_2}\right)}.$$

8. On obtient $\underline{N_1 = 7,7\times 10^2\,\text{N}}$ et $\underline{N_2 = 2,2\times 10^3\,\text{N}}$. Les deux valeurs étant positives, il n'y a pas de contradiction avec l'hypothèse de contact. La moto ne décolle pas.
REMARQUE : *La pertinence de ce résultat nécessite tout de même de vérifier que la condition de non glissement est aussi vérifiée, cf question suivante !*

9. On obtient $\underline{T_1 = -24\,\text{N}}$ et $\underline{T_2 = 3,3\times 10^2\,\text{N}}$. La condition de non glissement selon la loi de Coulomb du frottement solide $|T_1| < fN_1$ et $|T_2| < fN_2$ est vérifiée pour les 2 forces, ce qui justifie a posteriori l'hypothèse cinématique.
REMARQUE : $T_1 < 0$ *car c'est elle qui met en mouvement la roue avant non motrice, alors que* $T_2 > 0$ *ce qui permet de faire avancer la moto en présence d'un couple moteur sur cette roue, car* $T_1 + T_2 = M\dot{v} > 0$.

10.
➔ Première méthode : on applique le TMC en O_2 à la roue arrière en présence du couple moteur de moment résultant $\Gamma\vec{e}_z$ et pour une liaison pivot parfaite. En reprenant les mêmes argument qu'en **5.**, on obtient selon $\vec{e}_z$

$$-\frac{J_2}{r_2}\dot{v} = r_2T_2 + \Gamma \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Gamma = -r_2\left(M + \frac{J_1}{r_1^2} + \frac{J_2}{r_2^2}\right)\dot{v}} = \underline{-1,8\times 10^2\,\text{N.m}}\,.$$

➔ Deuxième méthode : on applique le théorème de l'énergie cinétique au système global, dans $\mathcal{R}$ galiléen. L'énergie cinétique totale est obtenue en faisant la somme de l'énergie cinétique globale de translation et des énergies cinétiques de rotation des deux roues autour de chaque axe [1].

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{2}Mv^2 + \tfrac{1}{2}J_1\omega_1^2 + \tfrac{1}{2}J_2\omega_2^2\right) = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}} = \mathcal{P}_{\text{contact}} + \mathcal{P}_{\text{pes}} + \mathcal{P}_{\text{pivot1}} + \mathcal{P}_{\text{pivot2}} + \mathcal{P}_{\text{moteur}}$$

Or on a

1. Théorème de Kœnig, hors programme depuis 2014...! mais que l'on peut vous faire redémontrer comme ci-dessus pour la décomposition du moment cinétique.

- $\mathcal{P}_{\text{contact}} = 0$ car il n'y a pas glissement sur la route (qui est immobile !) ;
- $\mathcal{P}_{\text{pes}} = M\vec{g}.\vec{v} = 0$ pour un mouvement horizontal ;
- $\mathcal{P}_{\text{pivot1}} = \vec{\mathcal{M}}_{\text{pivot1}}(O_1).\omega_1\vec{e}_z = 0$ car la liaison est parfaite, et de même pour $\mathcal{P}_{\text{pivot2}}$;
- $\mathcal{P}_{\text{moteur}} = \Gamma\vec{e}_z.\omega_2\vec{e}_z = \Gamma\omega_2$.

En utilisant les relation cinématiques de non glissement (question **2.**) on obtient

$$\forall t\,,\quad \left(M + \frac{J_1}{r_1^2} + \frac{J_2}{r_2^2}\right) v\dot{v} = \Gamma\omega_2 = -\Gamma\frac{v}{r_2} \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{\Gamma = -r_2\left(M + \frac{J_1}{r_1^2} + \frac{J_2}{r_2^2}\right)\dot{v}} = \underline{-1,8\times10^2\,\text{N.m}}\,.$$

II.2. Roue arrière

11. On utilise la relation de changement de point et le résultat de la question **4.**, en l'absence de contact sur la roue avant :

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}(O_2) &= \vec{\sigma}(G) + \overrightarrow{O_2G}\wedge\left(\sum_i m_i\vec{v}_i\right)\\ &= \vec{\sigma}_1(O_1) + \vec{\sigma}_2(O_2) + (d_2\vec{e}_x{}' + (h-r_2)\vec{e}_y{}')\wedge M\vec{v}_G \quad \text{avec} \quad \vec{v}_G = v\vec{e}_x\\ &= J_1\omega_1\vec{e}_z + J_2\omega_2\vec{e}_z + M(-d_2\sin\theta + (r_2-h)\cos\theta)v\vec{e}_z\end{aligned}$$

d'où en négligeant le mouvement de la roue avant, et avec la condition de non glissement de la roue arrière :

$$\boxed{\vec{\sigma}(O_2) \approx \left(-\frac{J_2}{r_2} - Md_2\sin\theta + M(r_2-h)\cos\theta\right) v\,\vec{e}_z}\,.$$

12. Les actions extérieures ont toutes un point d'application :

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}}(O_2) &= \overrightarrow{O_2G}\wedge M\vec{g} + \overrightarrow{O_2I_2}\wedge\left(\vec{T}_2 + \vec{N}_2\right)\\ &= (d_2\vec{e}_x{}' + (h-r_2)\vec{e}_y{}')\wedge Mg\left(-\sin\theta\vec{e}_x{}' - \cos\theta\vec{e}_y{}'\right) - r_2\vec{e}_y\wedge(T_2\vec{e}_x + N_2\vec{e}_y) \quad \text{d'où}\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}}(O_2) = \left[Mg\left(-d_2\cos\theta + (h-r_2)\sin\theta\right) + r_2T_2\right]\vec{e}_z}\,.$$

13. Le TMC appliqué en O_2 au système global s'écrit maintenant, en projection selon $\vec{e}_z$:

$$\left(-\frac{J_2}{r_2} - Md_2\sin\theta + M(r_2-h)\cos\theta\right)\dot{v} = Mg\left(-d_2\cos\theta + (h-r_2)\sin\theta\right) + r_2T_2\,.$$

Comme précédemment, on applique aussi le TRC au même système, ce qui donne selon $\vec{e}_x$: $M\dot{v} = T_2$. Ceci conduit à

$$\boxed{\frac{\dot{v}}{g} = f(\theta) = \frac{d_2\cos\theta - (h-r_2)\sin\theta}{\frac{J_2}{Mr_2} + d_2\sin\theta + r_2(1-\cos\theta) + h\cos\theta}}\,.$$

D'après le graphe proposé dans l'énoncé, on obtient $\underline{\theta \approx 18°}$.
Remarque : $f(\theta)$ est décroissante, ce qui est bien conforme à l'expérience que l'on peut avoir pour ceux qui ont déjà fait de la roue arrière... Plus on accélère plus on risque de basculer en arrière, donc plus il faut un θ petit (pour compenser en accentuant le moment du poids).
On remarque aussi que $f(\theta) < 0$ au -delà de $\theta = 40°$, ce qui montre que c'est l'angle maximal possible (car $\dot{v} > 0$ par hypothèse).

II.3. Frottement fluide

14. D'après la question **10.** et la condition cinématique de non glissement (question **2.**), l'énergie cinétique totale de la moto+conducteur s'écrit : $\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_2^2 = \frac{1}{2}\left(M + \frac{J_1}{r_1^2} + \frac{J_2}{r_2^2}\right)v^2$, et le théorème de l'énergie cinétique appliqué à ce système, en l'absence de puissance des forces intérieures autres que celle du moteur, s'écrit maintenant :

$$\left(M + \frac{J_1}{r_1^2} + \frac{J_2}{r_2^2}\right) v\dot{v} = -\Gamma\frac{v}{r_2} - kv^3, \quad \forall t \qquad\Leftrightarrow\qquad \boxed{\left(M + \frac{J_1}{r_1^2} + \frac{J_2}{r_2^2}\right)\dot{v} = -\frac{\Gamma}{r_2} - kv^2, \quad \forall t},$$

après simplification par v en présence de mouvement.

15. Comme $\Gamma < 0$, l'équation ci-dessus montre que lorsque v est faible (avec $v > 0$), $\dot{v} > 0$ donc le véhicule accentue sa vitesse. Mais plus v est grand plus l'accélération s'affaiblit à cause du terme de frottement. Finalement on peut supposer que le véhicule tend vers une vitesse limite constante v_ℓ. Ceci conduit à l'équation

$$0 = -\frac{\Gamma}{r_2} - kv_\ell^2 \qquad\Leftrightarrow\qquad \boxed{v_\ell = \sqrt{-\frac{\Gamma}{kr_2}}}\,.$$

L'équivalence confirme l'existence de cette solution.

16. On en déduit $\boxed{\dot{v} + av^2 = a\,v_\ell^2}$ avec $\boxed{a = \dfrac{k}{M + \frac{J_1}{r_1^2} + \frac{J_2}{r_2^2}}}$.

17. ➔ Première méthode : par séparation des variables on obtient $\frac{\mathrm{d}v}{v_\ell^2 - v^2} = a\,\mathrm{d}t$. La fraction rationnelle se décompose en éléments simples selon : $\frac{1}{v_\ell^2-v^2} = -\frac{1}{2v_\ell(v-v_\ell)} + \frac{1}{2v_\ell(v+v_\ell)}$. L'intégration entre $t = 0$ et t conduit à

$$-\ln|v - v_\ell| + \ln v_\ell + \ln(v+v_\ell) - \ln v_\ell = 2v_\ell\,at \quad\Leftrightarrow\quad \ln\frac{v+v_\ell}{v_\ell - v} = 2v_\ell at \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{v = v_\ell\,\frac{1-e^{-2v_\ell at}}{1+e^{-2v_\ell at}}}\,.$$

Remarque : on retrouve bien que $v \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} v_\ell$.

➔ Méthode suggérée par l'énoncé (changement de fonction) : posons $u = \left(1 - \frac{v}{v_\ell}\right)^{-1}$, ce qui implique $v = v_\ell\,\frac{u-1}{u}$ d'une part et $\dot{v} = v_\ell\,\frac{\dot{u}}{u^2}$. Réinjectées dans l'équation différentielle, ceci conduit après simplification à l'équation suivante :

$$\dot{u} - 2av_\ell\,u = -av_\ell \quad \text{avec} \quad u(0) = 1 \quad\Leftrightarrow\quad u(t) = \frac{1}{2}e^{2av_\ell t} + \frac{1}{2}\,.$$

Après inversion on retrouve $\boxed{v = v_\ell\,\dfrac{1-e^{-2v_\ell at}}{1+e^{-2v_\ell at}}}$.