MÉCANIQUE

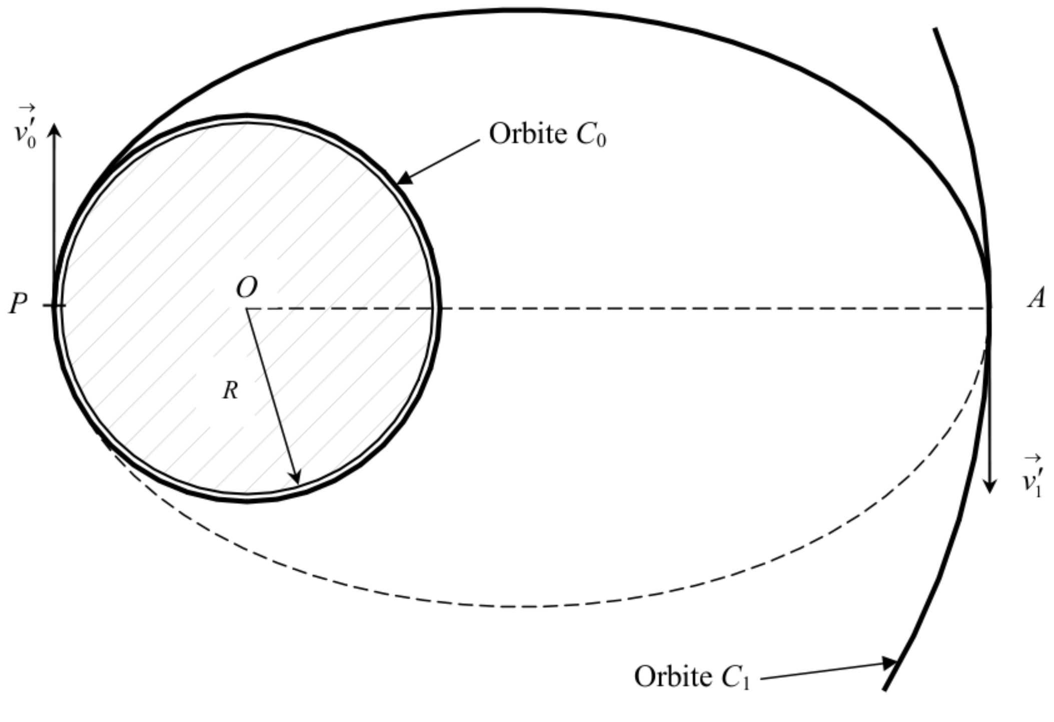
CALCULATRICES AUTORISÉES

I. Lancement d'un satellite

La Terre est considérée comme un astre sphérique de centre O, de rayon R et de masse M. Le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_G$ est supposé galiléen. La Terre est animée par rapport à ce référentiel d'un mouvement de rotation uniforme de période T. On désigne par g_0 l'intensité du champ de gravitation terrestre à la surface de la Terre.

1. On place un satellite S de masse m considéré ponctuel sur une orbite circulaire C_0 située dans le plan équatorial et d'altitude z faible devant R (cf figure ci-dessous). On considère que sur l'orbite C_0 le satellite est soumis au champ de pesanteur $\vec{g}_0$ identique à celui qui règne au niveau du sol.

- **a)** Déterminer la vitesse v_0 du satellite S en fonction de g_0 et R.
- **b)** En déduire la période T_0 du satellite en fonction de g_0 et R.
- **c)** Déterminer la vitesse v_E d'un point de l'équateur terrestre en fonction de R et T, puis exprimer le rapport $q = \frac{v_E^2}{v_0^2}$. Calculer q pour $R = 6400\,\text{km}$, $g_0 = 9,81\,\text{m.s}^{-2}$ et $T = 24\,h$.



Dans la suite du problème, on négligera v_E devant v_0.

2. On place maintenant le satellite S sur une nouvelle orbite C_1 située dans le plan équatorial. On désire que S soit vu immobile de tout point de la surface terrestre, on parle alors de satellite géostationnaire. On ne considère plus que z est très petit devant R.

- **a)** Exprimer le champ gravitationnel g en fonction de g_0 et z notamment.
- **b)** Déterminer le rayon R_1 de cette nouvelle orbite C_1. En déduire l'expression du rapport $x = \frac{R_1}{R}$, puis sa valeur numérique.
- **c)** Déterminer la vitesse v_1 du satellite sur l'orbite C_1 en fonction de x et v_0.

d) Exprimer en fonction de $K_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$ et de x, le travail W que doivent fournir les propulseurs pour amener le satellite sur l'orbite C_1 depuis la surface terrestre.

3. La mise en orbite géostationnaire du satellite S est réalisée de la manière suivante :

— Phase 1 : On lance le satellite depuis la surface terrestre sur l'orbite C_0. On désigne par W_1 le travail nécessaire à cette opération.

— Phase 2 : En un point P de C_0, on communique au satellite en un temps très bref une nouvelle vitesse v_0' de manière à le placer sur une orbite elliptique tangente à C_1 au point A. On désigne par v_1' la vitesse du satellite à son arrivée au point A.

— Phase 3 : Au point A, on fait passer la vitesse du satellite de v_1' à v_1.

a) Exprimer le travail des propulseurs W_1 nécessaire à la phase 1 en fonction de K_0.

b) Calculer la vitesse v_0' en fonction de v_0 et de x.

c) Exprimer le travail des propulseurs W_2 nécessaire à la phase 2 en fonction de K_0 et de x.

d) Déterminer la vitesse v_1' en fonction de v_0 et de x.

e) Exprimer le travail des propulseurs W_3 nécessaire à la phase 3 en fonction de K_0 et de x. Comparer le travail W calculé à la question **2.d)** et la somme $W_1 + W_2 + W_3$. Commenter.

f) Déduire de la 3$^{\text{eme}}$ loi de Kepler la durée Δt du transfert du satellite de l'orbite C_0 à l'orbite C_1 en fonction de T et de x. Faire l'application numérique.

4. On s'intéresse maintenant au cas d'un satellite de basse altitude (qui n'est donc plus géostationnaire), dont on souhaite étudier l'évolution sous l'effet de la force de frottement atmosphérique. Le satellite décrit une orbite circulaire de rayon $r = R + z$ et de période T_S. Dans les hautes couches de l'atmosphère, le satellite subit une force de frottement fluide $\overrightarrow{F}$ très inférieure à l'attraction gravitationnelle terrestre, de la forme :

$$\overrightarrow{F} = -\frac{\lambda m}{z}\, v\, \overrightarrow{v}\,,$$

où $\overrightarrow{v}$ est la vitesse instantanée du satellite et v sa norme.

a) Justifier qualitativement la dépendance de $\overrightarrow{F}$ en fonction de z.

b) En vous servant des questions précédentes, exprimer v et T_S en fonction de z et des constantes nécessaires.

c) A cause des frottements, au cours d'une révolution la vitesse varie légèrement de Δv ainsi que l'altitude de Δz. Ces variations peuvent être considérées petites devant v et z respectivement. Etablir une relation entre Δv et Δz, qu'on exprimera en fonction de T_S. Comment évolue la vitesse si le satellite se rapproche légèrement de la Terre ?

d) Montrer que le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma} = \sigma\,\vec{u}_z$ du satellite pris au centre de la Terre n'est pas conservé. Calculer sa variation $\Delta\sigma$ au cours d'une révolution en fonction de T_S et λ notamment.

e) Calculer maintenant σ en fonction de z et en déduire la relation entre $\Delta\sigma$ et Δz. En déduire si le satellite se rapproche de la Terre ou s'éloigne.

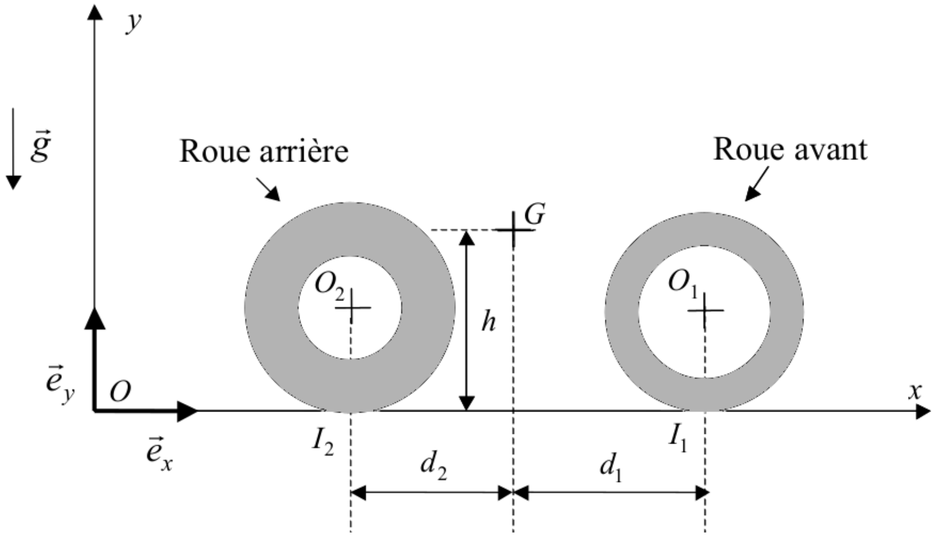
II. Motocyclette

On étudie un système constitué d'une motocyclette et de son conducteur, dans un référentiel $\mathcal{R}$ supposé galiléen, auquel on associe un repère $Oxyz$ (axe Ox horizontal). L'accélération de la pesanteur est notée $\vec{g} = -g\vec{e}_y$, avec $g = 9,81\,\text{m.s}^{-2}$. La masse totale du système est $M = 300\,\text{kg}$, la position de son centre de masse G est caractérisée par les distances $d_1 = 0,7\,\text{m}$, $d_2 = 0,4\,\text{m}$ et $h = 1\,\text{m}$ (voir figure ci-dessous). La roue avant, pneu inclus, de centre O_1, possède un rayon $r_1 = 0,5\,\text{m}$ et un moment d'inertie $J_1 = 6\,\text{kg.m}^{-2}$ relativement à un axe $(O_1, \vec{e}_z)$. La roue arrière, pneu inclus, de centre O_2, possède un rayon $r_2 = 0,52\,\text{m}$ et un moment d'inertie $J_2 = 10\,\text{kg.m}^{-2}$ relativement à un axe $(O_2, \vec{e}_z)$.

Lorsque la moto se déplace, les deux roues sont en contact avec la chaussée supposée horizontale. Les points de contact des roues avant et arrière sont notés I_1 et I_2. Le coefficient de frottement des roues sur le sol est $f = 0,8$; il ne sera pas fait de distinction entre le coefficient de frottement statique et le coefficient de frottement dynamique. Les réactions du sol sur les roues sont respectivement $\vec{R}_1 = T_1\vec{e}_x + N_1\vec{e}_y$ et $\vec{R}_2 = T_2\vec{e}_x + N_2\vec{e}_y$. Les liaisons pivot des roues sont supposées parfaites.

La roue avant est non motrice, alors que la roue arrière est soumise à un un couple de moment résultant $\Gamma.\vec{e}_z$ ($\Gamma < 0$).

On note $\vec{v} = v\vec{e}_x$ la vitesse de translation de l'ensemble à l'instant t (on se limitera au cas $v > 0$), et $\omega_1\vec{e}_z$ et $\omega_2\vec{e}_z$ les vitesses de rotation instantanées des roues avant et arrière. On supposera toujours que les roues roulent sans glisser sur le sol.



Enfin, pour les questions allant de **1.** à **13.**, on négligera l'action de l'air ambiant sur la moto et son conducteur (il peut s'agir, par exemple, d'une phase de démarrage pour laquelle la vitesse n'est pas élevée).

II.1. Démarrage

1. En utilisant le théorème de la résultante cinétique, donner deux expressions (1) et (2) liant N_1, N_2, T_1, T_2, M, g, et $\dot{v}$ (accélération instantanée).

2. Ecrire les relations de non glissement des roues sur le sol. En déduire les expressions de ω_1 et ω_2 en fonction de v, r_1, r_2.

3. On note $\vec{\sigma}_1(O_1)$ et $\vec{\sigma}_2(O_2)$, les moments cinétiques en O_1 et O_2 des roues avant et arrière dans le référentiel $\mathcal{R}$. Montrer, en utilisant la définition du centre de masse, que leur expression s'écrit en fonction de J_1, ω_1, et J_2, ω_2 comme dans le cas où les points O_1 et O_2 sont fixes, et donner ces expressions.

4. Montrer, en utilisant la définition du centre de masse G, que le moment cinétique total $\vec{\sigma}(G)$ de l'ensemble moto + conducteur relativement au point G dans $\mathcal{R}$ se limite à la somme des deux moments précédents.

5. En appliquant le théorème du moment cinétique dans $\mathcal{R}$ à la roue avant au point O_1 (on admettra qu'il s'écrit comme si O_1 était fixe), établir une relation (3) entre T_1, J_1, r_1, et $\dot{v}$.

6. En appliquant le théorème du moment cinétique dans $\mathcal{R}$ au système moto + conducteur en G (on admettra qu'il s'écrit comme si G était fixe), donner une expression (4) liant N_1, N_2, T_1, T_2 et h, d_1, d_2, J_1, r_1, J_2, r_2, $\dot{v}$.

7. À partir des relations obtenues, exprimer les forces de contact N_1, N_2, T_1, et T_2 en fonction de $\dot{v}$ et des paramètres du problème.

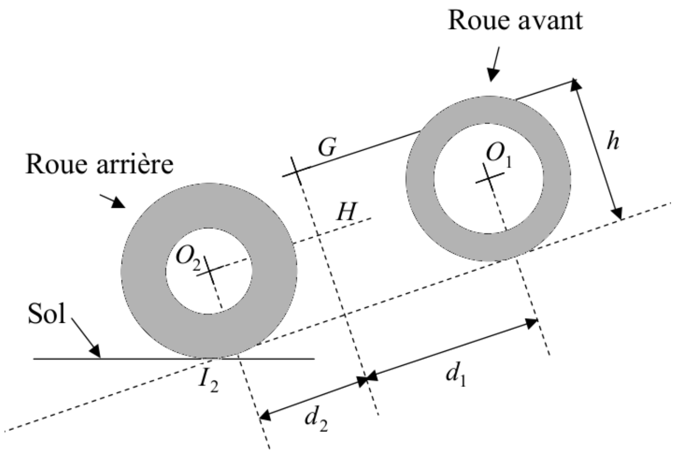
8. Pour une accélération telle que $\frac{\dot{v}}{g} = 0,1$, montrer que les roues ne décollent pas du sol.

9. De même, pour cette même accélération montrer qu'il n'y a pas glissement sur le sol.

10. Avec la méthode de votre choix, établir une relation (5) permettant de calculer le moment résultant du couple Γ. Faire l'application numérique pour $\frac{\dot{v}}{g} = 0,1$.

II.2. Roue arrière

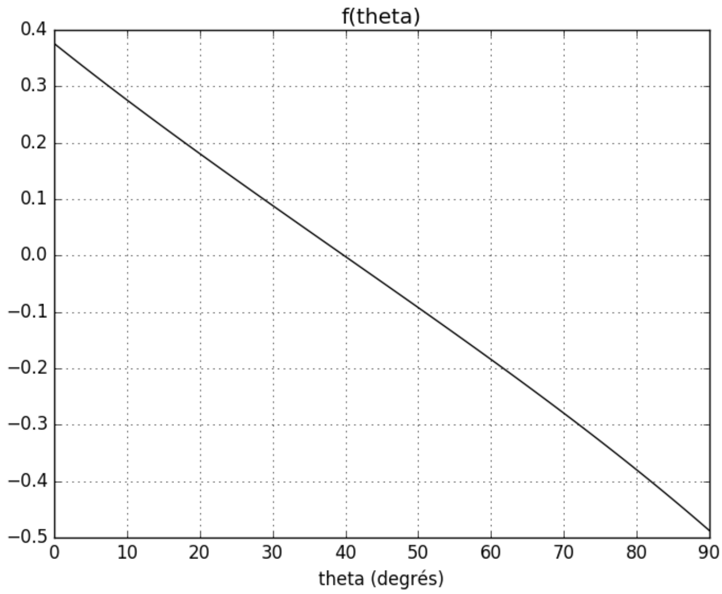
Pour les questions **11.** à **13.**, on suppose que le pilote parvient à soulever du sol la roue avant de son véhicule et on notera θ l'angle d'inclinaison de $\overrightarrow{O_1O_2}$ par rapport à l'horizontale (voir figure ci-contre), supposé constant pendant la phase étudiée.
Pour les calculs, on pourra utiliser la base $(\vec{e}_x{}', \vec{e}_y{}')$ qui est liée à la moto et donc obtenue par une rotation d'un angle θ de la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$.



11. En supposant négligeable la vitesse de rotation de la roue avant, exprimer le moment cinétique $\vec{\sigma}(O_2)$ en O_2 de l'ensemble moto + conducteur dans $\mathcal{R}$.

12. Exprimer la somme des moments $\vec{\mathcal{M}}(O_2)$ en O_2 appliqués à ce système global.

13. D'après les deux questions précédentes, montrer qu'on peut calculer l'angle θ si l'on connaît la valeur de $\frac{\dot{v}}{g}$, en inversant une équation du type $f(\theta) = \frac{\dot{v}}{g}$. Donner l'expression de $f(\theta)$.
Cette fonction est représentée dans le graphe de la figure ci-contre. Donner la valeur numérique de θ pour $\frac{\dot{v}}{g} = 0,2$.



II.3. Frottement fluide

On s'intéresse maintenant à une phase où la moto roule de nouveau sur ses deux roues, sur route horizontale. La vitesse étant plus importante, il est maintenant nécessaire d'introduire une force de frottement fluide $\vec{F} = -kv^2\vec{e}_x$.

14. À l'aide du théorème de l'énergie mécanique, établir l'équation différentielle vérifiée par v.

15. Montrer qu'il existe une valeur limite de la vitesse v_ℓ dont on donnera l'expression en fonction de Γ et des autres paramètres.

16. Montrer que l'équation différentielle peut s'écrire sous la forme $\dot{v} + a\,v^2 = a\,v_\ell^2$. On précisera l'expression de la constante a en fonction de k, M, J_1, J_2, r_1 et r_2.

17. En supposant que la vitesse est nulle à l'instant $t = 0$, établir la solution de l'équation différentielle précédente. Pour cela on pourra introduire le changement de fonction suivant : $u = \frac{v_\ell}{v_\ell - v}$.