

MÉCANIQUE

I. Manège pendulaire

- Le référentiel galiléen est défini par le **principe d'inertie** (1ère loi de Newton) : *il existe des référentiels privilégiés, appelés référentiels galiléens, dans lesquels tout point matériel isolé a un mouvement rectiligne uniforme.* En pratique le caractère galiléen est vérifié quantitativement par la validité expérimentale du Principe Fondamental de la Dynamique (PFD, 2nde loi de Newton).
Les **dimensions du manège** étant très faibles par rapport au rayon terrestre et la **durée d'un tour de manège** très petite devant 24h, le référentiel terrestre peut être considéré galiléen.

- Vecteur position : $\vec{OM} = (L + d \sin \alpha) \vec{u}_r + (h - d \cos \alpha) \vec{u}_z$.

- En coordonnées cylindriques, le vecteur position s'écrit $\vec{OM} = r \vec{u}_r + z \vec{u}_z$. La nacelle décrit un **cercle** de **rayon** $R = L + d \sin \alpha$, **d'axe** (Oz) , à la **hauteur** $z_0 = h - d \cos \alpha$, parcouru à la vitesse angulaire constante $\dot{\theta} = \omega$. M a donc un **mouvement circulaire uniforme**, d'équation intrinsèque : $r = R$ et $z = z_0$.

- On a donc $\vec{OM} = R \vec{u}_r + z_0 \vec{u}_z$.

Vitesse : $\vec{v} = \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = R \dot{\theta} \vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{v} = R \omega \vec{u}_\theta = (L + d \sin \alpha) \omega \vec{u}_\theta$

Accélération : $\vec{a} = \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = -R \omega^2 \vec{u}_r = -(L + d \sin \alpha) \omega^2 \vec{u}_r$.

- Forces extérieures appliquées à la nacelle :

- poids $m \vec{g} = -mg \vec{u}_z$;

- tension de la tige $\vec{T} = -T \sin \alpha \vec{u}_r + T \cos \alpha \vec{u}_z$, en notant $T = \|\vec{T}\|$.

- Le PFD appliqué au système {nacelle}, dans le référentiel \mathcal{R} considéré galiléen : $m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{T}$.

On projette sur \vec{u}_r et \vec{u}_z de la base cylindrique (il n'y a rien selon \vec{u}_θ) :

$$\begin{cases} (\vec{u}_r) : & -m(L + d \sin \alpha) \omega^2 = -T \sin \alpha \\ (\vec{u}_z) : & 0 = -mg + T \cos \alpha \end{cases}$$

La projection sur \vec{u}_z donne alors : $T = \frac{mg}{\cos \alpha}$.

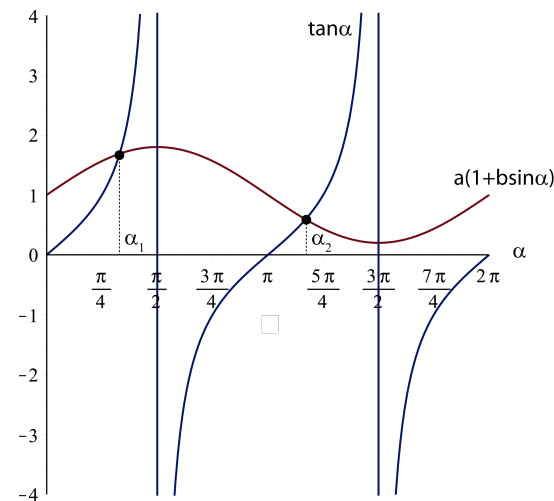
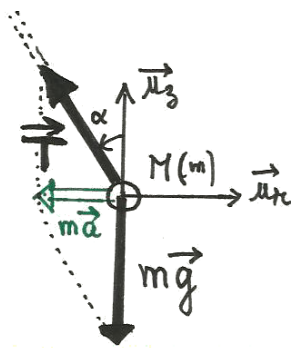
- En éliminant T dans la projection sur \vec{u}_r du PFD, il vient :

$$-m(L + d \sin \alpha) \omega^2 = -mg \tan \alpha \iff \frac{L \omega^2}{g} \left(1 + \frac{d}{L} \sin \alpha \right) = \tan \alpha \tag{1}$$

On trouve la relation demandée avec $a = \frac{L \omega^2}{g}$ et $b = \frac{d}{L}$.

La masse m n'intervient pas car nous avons **négligé les frottements**. Seuls le poids et la tension de la tige interviennent, tension qui s'adapte justement à la masse suspendue à l'attache.

- Les valeurs de α correspondent à l'intersection des deux courbes.

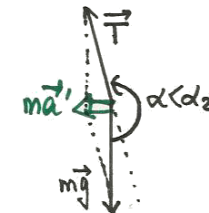
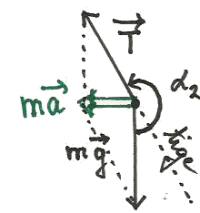


Il y a donc une solution $\alpha_1 \in [0, \pi/2]$ et une autre $\alpha_2 \in [\pi, 3\pi/2]$.

-

Solution α_1 - STABLE

Solution α_2 - INSTABLE



Rapprochement de l'axe $Oz \Rightarrow$ éloignement.

Éloignement de l'axe $Oz \Rightarrow$ éloignement.

Stabilité

Pour $\alpha < \alpha_1$ (ou α_2), l'accélération normale est alors plus faible en norme. Cela implique que le rayon de courbure de la trajectoire va s'accroître. Or dans le cas de gauche la distance à l'axe est plus petite qu'à l'équilibre, donc M revient vers sa position d'équilibre. C'est une position **stable**. Inversement, dans le cas de droite la distance à l'axe est plus grande qu'à l'équilibre, donc M s'éloigne encore plus de sa position d'équilibre. C'est une position **instable**. Bien sûr on obtient le même résultat si on considère au contraire un angle supérieur à la position d'équilibre.

REMARQUE : La position instable correspond à la nacelle renversée. Cette position d'équilibre n'existerait pas si la tige était remplacée par un câble, car il serait alors détendu, donc l'hypothèse cinématique liée à la longueur du fil serait alors invalidée.

- On résout l'équation $a(1 + b \sin \alpha) = \tan \alpha$, ce qui donne $\omega = \sqrt{\frac{g \tan \alpha}{L + d \sin \alpha}}$.

A.N. : $\omega = 0,68 \text{ rad.s}^{-1} = 6,6 \text{ tr.min}^{-1}$.

En exploitant la relation (1), l'expression de l'accélération subie par les passagers devient $a = g \tan \alpha \approx 0,58g$, ce qui est tout à fait supportable.

II. Looping dans un parc d'attraction

1. Le chariot est soumis à son poids (force conservative) et à la réaction normale des rails (orthogonale au déplacement, donc qui ne travaille pas). **Le système est donc conservatif.** L'énergie potentielle de pesanteur s'écrit $E_p = mgh$. La conservation de l'énergie mécanique entre les points A et B donne donc :

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv^2(B) + 0 \implies \boxed{v(B) = \sqrt{2gh}} \implies \boxed{h = \frac{v^2(B)}{2g}} = \underline{57\text{ m}}$$

2. a) On applique la conservation de l'énergie mécanique entre le point A et un point quelconque du rail circulaire :

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mgR(1 - \cos\theta) \quad \text{avec} \quad v = R\dot{\theta} \quad \text{et} \quad \dot{\theta} > 0, \quad \text{d'où} \quad \boxed{\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{R}} \left[\cos\theta - 1 + \frac{h}{R} \right]}.$$

- b) On applique le Principe Fondamental de la Dynamique (PDF) à $\{M\}$ selon \vec{u}_r , le point M n'étant soumis qu'à son poids $m\vec{g}$ et à la réaction normale du rail \vec{N} :

$$-mR\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - N \iff N = mg\cos\theta + mR\dot{\theta}^2$$

En injectant le résultat précédent, il vient $\boxed{N = mg \left[3\cos\theta + 2 \left(\frac{h}{R} - 1 \right) \right]}$.

- c) N ne doit jamais s'annuler pour que le chariot reste en contact avec le rail :

$$\boxed{\forall\theta, N > 0} \iff \forall\theta, 3\cos\theta + 2 \left(\frac{h}{R} - 1 \right) > 0 \iff 2 \left(\frac{h}{R} - 1 \right) > -3 \iff \boxed{\frac{h}{R} > \frac{5}{2}}$$

3. L'énergie cinétique E_c étant nulle au départ, il s'agit de la **courbe 3**.

L'énergie mécanique E_m ne fait que décroître en raison des frottements, car il n'y a pas de force motrice non conservative (pas de moteur), donc il s'agit de la **courbe 1**.

Comme la réaction normale, l'énergie potentielle oscille au gré des variations d'altitude, mais cette dernière commence nécessairement par décroître. Donc l'énergie potentielle E_p est la **courbe 2**.

La normale N est donc la **courbe 4**. Elle est constante au début du mouvement, ce qui est correct car le mouvement est rectiligne dans la première phase.

4. (i) La vitesse est maximale lorsque E_c est maximale. Sur la courbe 3, on lit $E_{c,max} = 5,6\text{ MJ}$. D'où

$$\boxed{v_{max} = \sqrt{\frac{2E_{c,max}}{m}}} = \underline{33\text{ m.s}^{-1}} = \underline{120\text{ km.h}^{-1}}.$$

- (ii) Initialement, $E_p(A) = mgh = 6,3\text{ MJ} \implies \boxed{h = \frac{E_p(A)}{mg}} = \underline{64\text{ m}}$.

Sans frottement, il fallait une hauteur de 57 m pour atteindre 120 km.h^{-1} . Dans le cas réel, on voit qu'il faut bien une **hauteur supérieure pour palier les frottements**.

Par ailleurs, le second maximum d'énergie potentielle est à 4 MJ pour une hauteur $2R$, de telle sorte que $\frac{h}{R} > \frac{5}{2}$. Les conditions sont donc réunies pour un tour complet s'il n'y a pas de frottements, avec une petite marge de sécurité.

- (iii) Le mobile quitte le rail la première fois que $N = 0$, c'est-à-dire en $\boxed{t = 32\text{ s}}$.

- (iv) On compte le nombre de tours par le nombre de minima de E_p (à zéro) moins un, la première annulation correspondant à l'entrée du chariot dans le rail circulaire. Le chariot aura donc effectué **deux tours complets** avant de décrocher à 2 tours et demi.

5. a) En mouvement circulaire : $a_r = -R\dot{\theta}^2 = -\frac{v^2}{R}$ donc $\boxed{a_r = -\frac{2E_c}{mR}}$.

- b) L'accélération maximale sera obtenue pour $E_{c,max} = 5,6\text{ MJ}$. Le rayon R du rail est obtenu grâce au second maximum d'énergie potentielle, qui vaut $\boxed{E_{p,max,2} = 2mgR} = \underline{4\text{ MJ}}$. Cela correspond à une

accélération radiale maximale $\boxed{|a_{r,max}| = \frac{4E_{c,max}}{E_{p,max,2}} g} = \underline{5,7\text{ g}}$. Cette accélération maximale se produit

lorsque le chariot atteint pour la première fois le point le plus bas du looping, B , à l'entrée dans le rail circulaire. Comme $\boxed{|a_{r,max}| > 5\text{ g}}$, les passagers **risquent de perdre connaissance** (puis de s'écraser sur le sol au bout de 2 tours de demi...). Il faudra revoir les paramètres de cette attraction avant de la mettre en service !

III. Bifurcation mécanique

1. a) Le système M de masse m est soumis à son poids et à la réaction normale du support en l'absence de frottements. Ces deux forces ne travaillent pas. Il est soumis aussi aux deux forces de tension des ressorts, qui sont conservatives, d'énergie potentielle totale

$$E_p = 2 * \frac{1}{2} k (\ell - \ell_0)^2 \quad \text{avec} \quad \ell = \sqrt{a^2 + x^2}.$$

Donc le système est conservatif et son énergie mécanique est conservée :

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + k(\sqrt{a^2 + x^2} - \ell_0)^2 = \text{constante}$$

- b) On dérive par rapport au temps cette équation, et on simplifie par \dot{x} car on cherche une solution continue qui ne soit pas identiquement nulle. On obtient l'équation du mouvement :

$$\ddot{x} + \frac{2k}{m} x \left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right) = 0$$

2. Une position d'équilibre correspond à $\ddot{x} = 0$ donc à

$$\frac{dE_p}{dx} = 2kx \left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right) = 0 \tag{2}$$

On obtient les solutions

$$x_0 = 0 \quad \text{et} \quad x = \pm x_1 \quad \text{avec} \quad x_1 = \sqrt{\ell_0^2 - a^2}$$

les deux dernières n'existant que si $a < \ell_0$, donc si le ressort est comprimé au voisinage de $x = 0$. On calcule la dérivée seconde de E_p en ces points d'équilibre pour savoir si ce sont des minima, c'est-à-dire s'ils sont stables. On obtient

$$\frac{d^2 E_p}{dx^2} = 2k \left(1 - \frac{\ell_0 a^2}{\ell^3} \right) \quad \text{donc}$$

$$\frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_0) = 2k \left(1 - \frac{\ell_0}{a} \right) > 0 \Leftrightarrow a > \ell_0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2 E_p}{dx^2}(\pm x_1) = 2k \left(1 - \frac{a^2}{\ell_0^2} \right) > 0$$

Donc la position x_0 est stable si $a > \ell_0$, instable sinon. Les positions $\pm x_1$ sont stables lorsqu'elles existent.

3. a) Développée au voisinage d'une position d'équilibre x_e au plus petit ordre non nul, l'équation de l'énergie s'écrit :

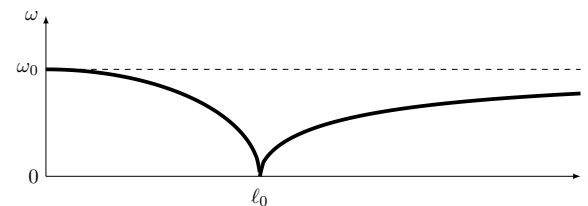
$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + E_p(x_e) + \frac{1}{2} \frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_e) (x - x_e)^2 = \text{constante}$$

En effet, la dérivée seconde est non nulle tant que $\ell_0 \neq a$. Il s'agit de l'énergie d'un oscillateur harmonique, de pulsation propre

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m} \frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_e)} \quad , \quad \text{ce qui donne}$$

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{a^2}{\ell_0^2}} \quad \text{pour} \quad a < \ell_0 \quad \text{autour de} \quad x_e = \pm x_1, \quad \text{où l'on a posé} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}.$$

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\ell_0}{a}} \quad \text{pour} \quad a > \ell_0 \quad \text{autour de} \quad x_e = x_0 = 0,$$



- b) Au passage par la valeur critique $a = \ell_0$, le système passe d'un état d'équilibre stable central à deux équilibres excentrés. Il doit donc choisir entre l'un des deux états (droit ou gauche) autour duquel osciller, d'où le mot bifurcation. Ce passage se fait en passant par une période infinie, tout du moins dans l'approximation harmonique, donc des oscillations de plus en plus lentes.
4. a) Le système évolue au voisinage de la position $x_0 = 0$, à la pulsation $\omega \approx \omega_0$ car $a \gg \ell_0$, mais ses oscillations sont amorties. L'équation du mouvement est donc

$$\ddot{x} + \frac{h}{m} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

- b) L'allure du portrait de phase dépend de la valeur du facteur de qualité, $Q = \frac{m\omega_0}{h} = \frac{\sqrt{2km}}{h}$. Dans le premier cas, $Q = 1,4$ donc le mouvement est pseudo-périodique : la masse tend vers $x = 0$ en oscillant, le portrait fait une spirale. Dans le second cas, $Q = 0,4$ donc le mouvement est apériodique : le portrait tend directement vers $x = 0$ sans tourner autour (la vitesse ne change pas de signe).

