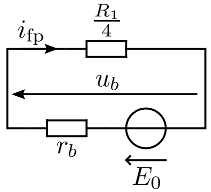
# ÉLECTRICITÉ

## I. Étude de circuits électriques présents dans des automobiles

**1.** Un résistor reçoit une puissance $\mathcal{P}_i = \frac{U^2}{R_i}$, d'où $\boxed{R_i = \dfrac{U^2}{\mathcal{P}_i}}$, ce qui donne $\underline{R_1 = 29\,\Omega}$, $\underline{R_2 = 3,2\,\Omega}$ et $\underline{R_3 = 6,9\,\Omega}$.

**2.** Le schéma est le suivant

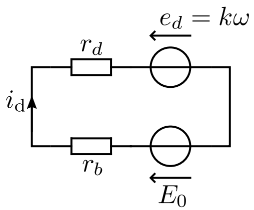



Les quatre résistances $R_1$ en dérivation équivalent à une seule de valeur $R_{\text{eq}} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1}\right)^{-1} = \frac{R_1}{4}$.

La loi des mailles conduit à $\boxed{i_{\text{fp}} = \dfrac{E_0}{r_b + R_1/4}} = \underline{1,9\,\text{A}}$.

Par la relation du pont diviseur de tension on obtient alors $\boxed{u_b = \dfrac{E_0}{1 + 4r_b/R_1}} = \underline{14\,\text{V}}$.

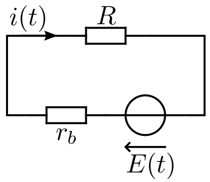
**3.**




Le schéma équivalent est ci-contre.

La loi des mailles conduit à $\boxed{i_{\text{d}} = \dfrac{E_0 - k\omega}{r_b + r_d}} = \underline{6.10^2\,\text{A}}$.

**4. a)**




Le schéma équivalent est ci-contre.
De même que précédemment, la loi des mailles conduit à $\boxed{i(t) = \dfrac{E(t)}{r_b + R}}$.

**b)** Soit $\delta q$ la quantité élémentaire de charge sortant par la borne + du générateur entre les instants $t$ et $t + \text{d}t$. On a $E(t) = E_0 - \alpha q(t)$ et $E(t + \text{d}t) = E_0 - \alpha(q(t) + \delta q)$, d'où une variation $\text{d}E = E(t + \text{d}t) - E(t) = -\alpha\delta q$.
D'autre part le courant est le même partout dans la branche puisque le régime est lentement variable (approximation des régimes quasi-stationnaires), donc $i(t) = \frac{\delta q}{\text{d}t}$. On en déduit $\frac{\text{d}E}{\text{d}t} = \dot{E}(t) = -\alpha i(t)$.

Avec le résultat précédent cela conduit à $\boxed{\tau\dot{E} + E = 0}$ avec $\boxed{\tau = \dfrac{r_b + R}{\alpha}}$.

**c)** La solution s'écrit sous la forme $E(t) = \lambda.e^{-\frac{t}{\tau}}$, où $\lambda$ est une constante. À l'instant initial $t = 0$ on a $E(t) = E_0 = \lambda$ donc finalement $\boxed{E(t) = E_0.e^{-\frac{t}{\tau}}}$ avec $\boxed{\tau = \dfrac{r_b + R}{\alpha}}$.

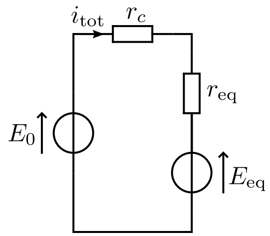
**d)** On peut utiliser la loi précédemment établie, en prenant $R = \left(\frac{2}{R_1} + \frac{2}{R_2}\right)^{-1}$. On cherche l'instant $t_1$ vérifiant

$$E_1 = E(t_1) = E_0.e^{-\frac{t_1}{\tau}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{t_1 = \tau\,\ln\left(\frac{E_0}{E_1}\right)} = \underline{4,4.10^4\,\text{s}} \approx \underline{12\,\text{h}}.$$

**5.** PREMIÈRE MÉTHODE : on simplifie le circuit en associant les générateurs de Thévenin qui sont en dérivation (il faut passer par leur représentation de Norton associée). On obtient alors le circuit suivant :



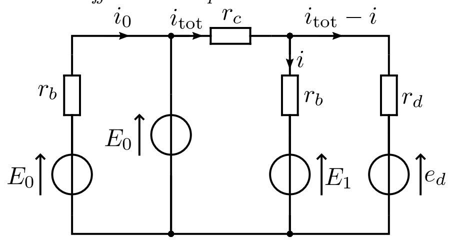





Les équivalences et associations de générateurs conduisent à $\boxed{r_{\text{eq}} = \left(\dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_d}\right)^{-1}}$ et $\boxed{e_{\text{eq}} = \dfrac{r_d E_1 + r_b e_d}{r_b + r_d}}$.

La loi des mailles conduit à $\boxed{i_{\text{tot}} = \dfrac{E_0 - e_{\text{eq}}}{r_c + r_{\text{eq}}} = \dfrac{E_0(r_b + r_d) - r_d E_1 - r_b e_d}{r_c r_b + r_c r_d + r_b r_d}} = \underline{1,4.10^2\,\text{A}}$.

DEUXIÈME MÉTHODE : On introduit des courants dans le circuit tel qu'il est et on le traite avec les lois de Kirchhoff. Dans la maille de gauche : $E_0 - r_b i_0 = E_0$ donc $i_0 = 0$. *Grâce à l'alternateur la batterie ne débite effectivement pas de courant.*

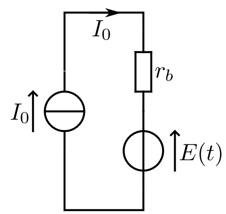



On écrit les deux autres lois de maille indépendantes, sachant que la loi des nœuds est déjà écrite sur le schéma :

$$E_0 = r_c i_{\text{tot}} + r_b i + E_1 \qquad (1)$$
$$E_0 = r_c i_{\text{tot}} + r_d(i_{\text{tot}} - i) + e_d \qquad (2)$$

On élimine ensuite l'inconnue $i$ au profit de $i_{\text{tot}}$ par la combinaison linéaire $r_d(1) + r_b(2)$, ce qui conduit à la même expression que précédemment.

**6. a)**




Le schéma équivalent est ci-contre.
De même que précédemment, $E = E_0 + \alpha_{\text{ch}}.q$ donc $\frac{\text{d}E}{\text{d}t} = \alpha_{\text{ch}}.\frac{\delta q}{\text{d}t} = \alpha_{\text{ch}}.I_0$.
Par intégration entre $t = 0$ tel que $E(0) = E_2$ et un instant $t$ quelconque, on obtient $E(t) = E_2 + \alpha_{\text{ch}}.I_0.t$.

Posons l'instant $t_2$ tel que $E(t_2) = E_0$, on obtient $\boxed{t_2 = \dfrac{E_0 - E_2}{\alpha_{\text{ch}} I_0}} = \underline{1,2.10^5\,\text{s}} \approx \underline{34\,\text{h}}$.

**b)** En supposant que la période $T$ des impulsions est très courte devant la durée totale de la charge $t'_2$ (vraissemblable d'après le calcul précédent), on peut considérer que la batterie est chargée par un courant moyen qui vaut $I_{\text{moy}} = \frac{1}{T}\int_0^{\eta T} I_0\,\text{d}t = \eta I_0$. Le nouveau temps de charge est donc $\boxed{t'_2 = \dfrac{t_2}{\eta} = \dfrac{E_0 - E_2}{\eta\alpha_{\text{ch}} I_0}} = \underline{38\,\text{h}}$.

**7.** La « tension à pleine charge » correspond à $E_0 = 14\,\text{V}$.
La « tension nominale » correspond à la tension $E_3 = 12\,\text{V}$ en dessous de laquelle il ne faut pas descendre pour le bon fonctionnement.

D'après la question **4.b)** on a $E_3 = E_0 - \alpha q$ d'où $\boxed{q = \dfrac{E_0 - E_3}{\alpha}} = \underline{2,5.10^5\,\text{C}} = \frac{2,5.10^5}{3600}\,\text{A.h} = \underline{69\,\text{A.h}} \approx \underline{70\,\text{A.h}}$. La « capacité de charge » correspond donc à **la quantité de charge que l'on peut extraire de la batterie dans les conditions normales de fonctionnement**.

# II. Étude de quelques méthodes de mesure de capacité

## II.1. Détermination graphique

**1.** La tension aux bornes d'un condensateur évolue continûment, donc $\boxed{u_c(0^+) = u_c(0^-) = -E}$.
La loi des mailles pour tout $t > 0$ : $0 = E - (R_g + R)i - u_c$.
À $t = 0^+$, cela donne $0 = E - (R_g + R)i(0^+) - u_c(0^+) = 2E - (R_g + R)i(0^+)$ d'où $\boxed{i(0^+) = \dfrac{2E}{R_g + R}}$.

**2.** Comme $i = C\dot{u}_c$, la loi des mailles ci-dessus conduit à $\boxed{\tau\dot{u}_c + u_c = E}$, avec $\boxed{\tau = (R_g + R)C}$.

**3.** La solution générale est la somme d'une solution particulière constante $E$ et d'une solution générale de la forme $\lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$, avec $\lambda$ une constante d'intégration. Elle vérifie la condition initiale $u_c(0^+) = -E = \lambda + E \Leftrightarrow \lambda = -2E$. Finalement la solution s'écrit $\boxed{u_c(t) = E\left(1 - 2e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$ , $\forall t > 0$.

**4.** $u_c(t_1) = 0,80E = E\left(1 - 2e^{-\frac{t_1}{\tau}}\right) \Leftrightarrow e^{-\frac{t_1}{\tau}} = 0,10 \Leftrightarrow \boxed{t_1 = \tau \ln 10}$.

**5.** L'oscilloscope est assimilable (en mode DC) à une simple résistance $R_o \sim 1\,\text{M}\Omega$. Tant que cette résistance est grande devant $R_g + R$ présente dans la branche d'étude, on peut négliger le courant détourné dans l'oscilloscope.

**6.** La **voie B** représente la tension $u_c$, qui passe d'un régime permanent $u_c = e = -E_1$ au régime permanent suivant $u_c = e = E_1$, ou l'inverse. Il s'agit donc de la **courbe (1)**, et on peut y lire $\underline{E_1 = 3,0\,\text{V}}$. **La voie A** correspond à la tension de sortie du GBF, qui vaut $u_g = e - R_g i$. Comme le courant présente des discontinuités à chaque basculement, il n'est pas nul après le basculement d'où un décalage de $u_g$ par rapport $e$. Il s'agit donc bien de la **courbe (2)**.

**7.** Au point $P$, on est à l'instant $t_0^+$ tel que $e(t_0^+) = E_1$ (et $e(t_0^-) = -E_1$). Le courant lui passe du régime permanent $i(t_0^-) = 0$ à la valeur $i(t_0^+)$ telle que par la loi des mailles : $i(t_0^+) = \frac{e(t_0^+) - u_c(t_0^+)}{R_g + R} = \frac{2E_1}{R_g + R}$. On en déduit $u_g(t_0^+) = e(t_0^+) - R_g i(t_0^+)$ d'où $\boxed{u_g(t_0^+) = E_1 - E_1\dfrac{2R_g}{R_g + R} = E_1\dfrac{R - R_g}{R + R_g}}$.

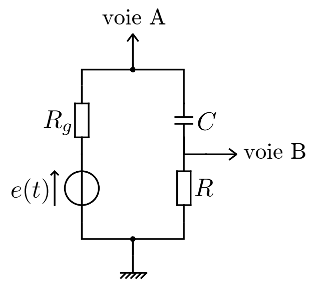
On lit $E_1 = 3,0\,\text{V}$ et $u_g(t_0^+) = 1,0\,\text{V}$ sur l'oscillogramme. On en déduit $\boxed{R_g = R\dfrac{E_1 - u_g(t_0^+)}{E_1 + u_g(t_0^+)}} = \underline{50\,\Omega}$.

**8.** *La valeur de $E_1$ était déjà nécessaire pour la question précédente...*. On lit $\underline{E_1 = 3,0\,\text{V}}$.
Sur le graphe on lit l'instant $t_1$ auquel $u_c$ croise la ligne « 90% » : $\underline{t_1 - t_0 = 0,425\,\text{ms}}$. À cet instant on a alors $u_c(t_1) = 0,8E_1$, d'où $t_1 - t_0 = \tau \ln 10$ d'après la question **4.**, avec $\tau = (R_g + R)C$. On en déduit $\boxed{C = \dfrac{t_1 - t_0}{(R_g + R)\ln 10}} = \underline{1,2.10^{-6}\,\text{F}}$.

**9.** L'arche positive du créneau (régime permanent à $E_1$) visible sur l'oscillogramme s'étend sur 8 carreaux. On a donc au minimum $T/2 = 0,80\,\text{ms}$, d'où $\underline{f < 625\,Hz}$.

**10.**

Pour observer l'intensité, il faut observer la tension aux bornes de $R$ avec l'oscilloscope. Mais cela nécessite de **déplacer la masse pour qu'elle soit sur la résistance**, tout en étant nécessairement en contact avec le générateur de tension, comme indiqué ci-contre.

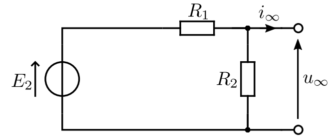






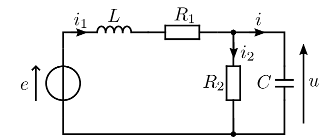

## II.2. Utilisation d'un circuit du second ordre

**11.**




En régime stationnaire, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert, et la bobine à un simple fil (cf ci-contre). On a donc $\boxed{i_\infty = 0}$ et $\boxed{u_\infty = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}E_2} = \underline{2,0\,\text{V}}$ par la relation du pont diviseur de tension.

**12.**




Loi des nœuds : $i_1 = i_2 + i$, avec $i_2 = \frac{u}{R_2}$ et $i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.
En injectant ces relations dans la loi des mailles on obtient :

$$\begin{aligned} e &= L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + R_1 i_1 + u \\ &= \frac{L}{R_2}\dot{u} + LC\ddot{u} + \frac{R_1}{R_2}u + R_1 C\dot{u} + u \end{aligned}$$

ce que l'on peut mettre sous la forme canonique

$$\boxed{\ddot{u} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u} + \omega_0^2 u = \frac{e}{LC}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.\sqrt{1 + \frac{R_1}{R_2}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{\omega_0}{\frac{1}{R_2 C} + \frac{R_1}{L}}}.$$

**13.** Les zéros du régime transitoire sont séparés d'une durée $\frac{T}{2}$, et correspondent aux instants où $u(t) = u_\infty = 2,0\,\text{V}$. On obtient ainsi $\underline{T = 3 \times 0,20\,\text{ms} = 0,60\,\text{ms}}$.
On mesure les 2 premiers maxima du régime transitoire, de valeur respective $u(t_m) - u_\infty = 2,0\,\text{V}$ et $u(t_m + T) - u_\infty = 0,5\,\text{V}$. D'où $\boxed{\delta = \ln\left(\dfrac{2}{0,5}\right)} = \underline{1,4}$ ;

**14.** Lorsque l'on a $e(t) = E_2$ à partir de $t = 0$, la solution générale est la somme d'un régime transitoire solution de l'équation sans second membre associée, et du régime permanent stationnaire $u_p = u_\infty = E_2\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)^{-1}$.
Il s'agit d'un régime transitoire pseudo-périodique puisqu'il y a des oscillations. Donc le discriminant de l'équation caractéristique $\Delta = 4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right)$ est négatif, donc $Q > \frac{1}{2}$ et il existe deux racines complexes conjuguées $r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\,\omega$ avec $\boxed{\omega = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}}$. Cela conduit à une solution générale du type $\boxed{u(t) = u_\infty + e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}.(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))}$, où $A$ et $B$ sont des constantes d'intégration réelles dépendant des conditions initiales.

**15.** D'après l'expression ci-dessus, la décroissance exponentielle est caractérisée par un temps caractéristique $\boxed{\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0}}$.

Or le décrément logarithmique vérifie $\delta = \frac{T}{\tau}$ donc $\boxed{\tau = \dfrac{T}{\delta}} = \underline{0,43\,\text{ms}}$.

**16.** *Les deux équations recherchées proviennent du fait que la connaissance des paramètres $T$ et $\delta$ permet de remonter aux deux paramètres $\omega_0$ et $Q$ ou ($\omega$ et $\tau$) qui caractérisent totalement le système dans son régime transitoire. Les résistances étant connues, on peut en déduire les paramètres cachés $L$ et $C$.*
D'une part on a $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ ce qui d'après l'expression de $\omega_0$ et $Q$ peut se réécrire sous la forme

$$\frac{2}{\tau} = \boxed{\frac{2\delta}{T} = \frac{1}{R_2 C} + \frac{R_1}{L}}. \qquad (1)$$

D'autre part on a $\omega^2 = \omega_0^2\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right) = \omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}$ et $\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}$ donc

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} + \frac{1}{\tau^2} = \boxed{\frac{4\pi^2+\delta^2}{T^2} = \frac{1}{LC}\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)}. \tag{2}$$

## II.3. Réalisation d'un capacimètre électronique

**17. a)** La tension aux bornes du résistor $R$ vaut $Ri = U_0 - V_-$ avec $V_- = V_+ = 0$ à cause de la masse. D'où $\boxed{i = \frac{U_0}{R}}$, qui est indépendant de $R_{\text{ch}}$.

**b)** La loi des nœuds en terme de potentiel écrite à l'entrée $-$ de l'ALI s'écrit : $\frac{U_0 - V_-}{R} + \frac{V_S - V_-}{R_{\text{ch}}} = 0$. D'où $\boxed{V_S = -\frac{R_{\text{ch}}}{R}U_0}$.

**c)** On demande $I_{\text{sat}} > |i_s| = |-i| = \frac{|U_0|}{R}$ donc $\boxed{R > \frac{|U_0|}{I_{\text{sat}}}} = \underline{40\,\Omega}$.

Pour $R = 1,0\,\text{k}\Omega$, on demande $V_{\text{sat}} > |V_S| = \frac{R_{\text{ch}}}{R}|U_0|$ donc $\boxed{R_{\text{ch}} < R\frac{V_{\text{sat}}}{|U_0|}} = \underline{15\,\text{k}\Omega}$.

**18.** À l'instant initial on a $\boxed{V_S = V_- = V_+ = 0}$ donc la charge du condensateur du côté de la sortie de l'ALI est $\boxed{q = (V_S - V_-)C = 0}$.

**19.** On a $I_0 = -C\frac{\mathrm{d}V_S}{\mathrm{d}t}$, d'où après intégration $\boxed{V_S(t) = -\frac{I_0}{C}t}$ en prenant en compte qu'initialement $V_S(0) = 0$.

**20.** À l'arrêt du compteur à l'instant final $t_f$, on a $V_S(t_f) = -\frac{I_0}{C}t_f = -V_{\text{sat}}$ d'où $t_f = \frac{V_{\text{sat}}C}{I_0}$. Le nombre affiché par le compteur est alors $N = \frac{t_f}{T_H} = t_f\,f_H = \frac{V_{\text{sat}}f_H C}{I_0}$ ou $N = \frac{V_{\text{sat}}Rf_H}{U_0}C$.

On souhaite que $\frac{N}{C} = 10^9\,F^{-1}$ donc $\boxed{R = \frac{N}{C}\frac{U_0}{V_{\text{sat}}f_H}} = \underline{2,0\,\text{k}\Omega}$.

Si $C = 1,0\,\mu\text{F}$, alors $\boxed{t_f = \frac{V_{\text{sat}}}{U_0}RC} = \underline{31\,\text{ms}}$.