MÉCANIQUE

I. Manège pendulaire

1. Le référentiel galiléen est défini par le **principe d'inertie** (1ère loi de Newton) : *il existe des référentiels privilégiés, appelés référentiels galiléens, dans lesquels tout point matériel isolé a un mouvement rectiligne uniforme.* En pratique le caractère galiléen est vérifié quantitativement par la validité expérimentale du Principe Fondamental de la Dynamique (PFD, 2nde loi de Newton).
Les **dimensions du manège** étant très faibles par rapport au rayon terrestre et la **durée d'un tour de manège** très petite devant 24 h, le référentiel terrestre peut être considéré galiléen.

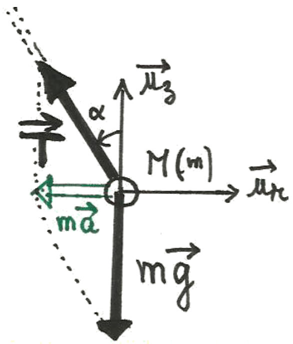
2. Vecteur position : $\boxed{\overrightarrow{OM} = (L + d\sin\alpha)\overrightarrow{u_r} + (h - d\cos\alpha)\overrightarrow{u_z}}$.

3. En coordonnées cylindriques, le vecteur position s'écrit $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r} + z\overrightarrow{u_z}$. La nacelle décrit un **cercle** de **rayon** $\boxed{R = L + d\sin\alpha}$, **d'axe** (Oz), à la **hauteur** $\boxed{z_0 = h - d\cos\alpha}$, parcouru à la vitesse angulaire constante $\boxed{\dot\theta = \omega}$. M a donc un **mouvement circulaire uniforme**, d'équation intrinsèque : $\boxed{r = R \quad \text{et} \quad z = z_0}$.

4. On a donc $\overrightarrow{OM} = R\,\overrightarrow{u_r} + z_0\,\overrightarrow{u_z}$.
Vitesse : $\overrightarrow{v} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = R\dot\theta\overrightarrow{u_\theta} \Longrightarrow \boxed{\overrightarrow{v} = R\omega\overrightarrow{u_\theta} = (L + d\sin\alpha)\omega\overrightarrow{u_\theta}}$
Accélération : $\boxed{\overrightarrow{a} = \left.\frac{d\overrightarrow{v}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = -R\omega^2\overrightarrow{u_r} = -(L + d\sin\alpha)\omega^2\overrightarrow{u_r}}$.

5. Forces extérieures appliquées à la nacelle :

- poids $\boxed{m\overrightarrow{g} = -mg\overrightarrow{u_z}}$;
- tension de la tige $\boxed{\overrightarrow{T} = -T\sin\alpha\overrightarrow{u_r} + T\cos\alpha\overrightarrow{u_z}}$, en notant $T = ||\overrightarrow{T}||$.



6. Le PFD appliqué au système {nacelle}, dans le référentiel $\mathcal{R}$ considéré galiléen : $m\overrightarrow{a} = m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{T}$.
On projette sur $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_z$ de la base cylindrique (il n'y a rien selon $\vec{u}_\theta$) :

$$\begin{cases} (\vec{u}_r) & : \quad -m(L + d\sin\alpha)\omega^2 = -T\sin\alpha \\ (\vec{u}_z) & : \quad 0 = -mg + T\cos\alpha \end{cases}$$

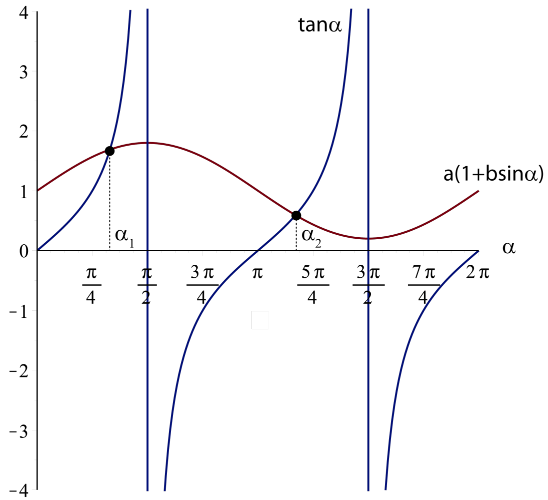
La projection sur $\overrightarrow{u_z}$ donne alors : $\boxed{T = \frac{mg}{\cos\alpha}}$.

7. En éliminant T dans la projection sur $\overrightarrow{u_r}$ du PFD, il vient :

$$-m(L + d\sin\alpha)\omega^2 = -mg\tan\alpha \Longleftrightarrow \boxed{\frac{L\omega^2}{g}\left(1 + \frac{d}{L}\sin\alpha\right) = \tan\alpha} \qquad (1)$$

On trouve la relation demandée avec $\boxed{a = \frac{L\omega^2}{g}}$ et $\boxed{b = \frac{d}{L}}$.
La masse m n'intervient pas car nous avons **négligé les frottements**. Seuls le poids et la tension de la tige interviennent, tension qui s'adapte justement à la masse suspendue à l'attache.

8. Les valeurs de α correspondent à l'intersection des deux courbes.

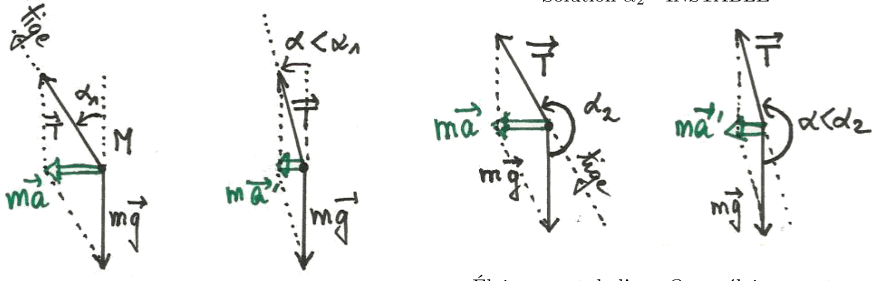


Il y a donc une solution $\alpha_1 \in [0, \pi/2]$ et une autre $\alpha_2 \in [\pi, 3\pi/2]$.

9.

Solution α_1 - STABLE

Solution α_2 - INSTABLE



Rapprochement de l'axe $Oz \Rightarrow$ éloignement.

Éloignement de l'axe $Oz \Rightarrow$ éloignement.

Stabilité
Pour $\alpha < \alpha_1$ (ou α_2), l'accélération normale est alors plus faible en norme. Cela implique que le rayon de courbure de la trajectoire va s'accentuer. Or dans le cas de gauche la distance à l'axe est plus petite qu'à l'équilibre, donc M revient vers sa position d'équilibre. C'est une position **stable**. Inversement, dans le cas de droite la distance à l'axe est plus grande qu'à l'équilibre, donc M s'éloigne encore plus de sa position d'équilibre. C'est une position **instable**. Bien sûr on obtient le même résultat si on considère au contraire un angle supérieur à la position d'équilibre.

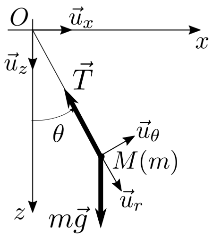
REMARQUE : *La position instable correspond à la nacelle renversée. Cette position d'équilibre n'existerait pas la tige était remplacée par un câble, car il serait alors détendu, donc l'hypothèse cinématique liée à la longueur du fil serait alors invalidée.*

10. On résout l'équation $a(1 + b\sin\alpha) = \tan\alpha$, ce qui donne $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g\tan\alpha}{L + d\sin\alpha}}}$.
A.N. : $\boxed{\omega = 0,68\,\text{rad.s}^{-1} = 6,6\,\text{tr.min}^{-1}}$.
En exploitant la relation (1), l'expression de l'accélération subie par les passagers devient $\boxed{a = g\tan\alpha} \approx \underline{0,58\,g}$, ce qui est tout à fait supportable.

II. Collisions de deux pendules

II.1. Pendule seul

1.



On écrit le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) dans le référentiel terrestre du laboratoire $\mathcal{R}$, considéré galiléen, pour le point matériel M soumis à son poids et à la tension du fil $\vec{T} = -T\vec{u}_r$ (avec T sa norme) :

$$m\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} = -m\ell\dot{\theta}^2\vec{u}_r + l\ell\ddot{\theta}\vec{u}_\theta = m\vec{g} + \vec{T}\ .$$

En projection selon $\vec{u}_\theta$, cela conduit à l'équation du mouvement $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0}$.

2. En développant au premier ordre non nul le sin on obtient la version linéarisée $\boxed{(\mathcal{E}) : \ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0}$ avec $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}}$ la pulsation propre et $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}$ la période propre.

3. La solution générale s'écrit $\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$, avec A et B deux constantes d'intégration. Les conditions initiales conduisent à $A = \theta_0$ et $B = 0$, d'où $\boxed{\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t)}$.

4. La position d'équilibre est $\theta = 0$ (il y en a deux mais considérons la position stable, car la linéarisation de l'équation différentielle n'est pas valable en $\theta = \pi$). Elle est atteinte à l'instant $t_0 = \frac{T_0}{4}$, de telle sorte que $\cos(\omega_0\frac{T_0}{4}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$. On a alors une vitesse maximale en norme, qui vaut $\vec{v} = \ell\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta = -\ell\theta_0\omega_0\sin(\omega_0\frac{T_0}{4})\,\vec{u}_\theta$ donc $\boxed{\vec{v}(t_0) = -\ell\theta_0\omega_0\,\vec{u}_x = -\theta_0\sqrt{g\ell}\,\vec{u}_x}$.

II.2. Système de deux pendules

5. Les résultats précédents sont applicables aux deux pendules, dont les lois horaires sont donc

$$\boxed{\theta_1(t) = \theta_{10}\cos(\omega_0 t)} \quad \text{et} \quad \boxed{\theta_2(t) = -\theta_{10}\cos(\omega_0 t)}.$$

Les pendules se rencontrent à l'instant t_1 tel que $\theta_1(t_1) = \theta_2(t_1) \Leftrightarrow \cos(\omega_0 t_1) = 0$ pour la première fois après l'instant 0. D'où **un point de rencontre sur l'axe** Oz et à l'instant $\boxed{t_1 = t_0 = \frac{T_0}{4} = \frac{\pi}{2\omega_0} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{g}{\ell}}}$.

6. **a)** Comme précédemment, on obtient des vitesses symétriques $\boxed{v_2 = -v_1 = \ell\theta_{10}\omega_0 = \theta_{10}\sqrt{g\ell}}$.

b) La conservation de la quantité de mouvement totale s'écrit (après projection selon $\vec{u}_x$) :

$$\boxed{m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2)}. \tag{2}$$

c) Le choc étant élastique, on a $\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2$, ce qui se ré-écrit $m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2)$. Le quotient de cette dernière équation par l'Eq. (2) conduit à

$$\boxed{v_1 + v_1' = v_2 + v_2'}. \tag{3}$$

d) La combinaison linéaire (3) $+ \frac{1}{m_1}$(2) conduit à

$$v_2' = \frac{2m_1v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2} \quad \text{et} \quad v_1' = v_2 - v_1 + v_2' = \frac{2m_2v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}\ . \tag{4}$$

En utilisant $v_2 = -v_1 = \theta_{10}\sqrt{g\ell}$ et l'Eq. (2) on trouve finalement

$$\boxed{v_2' = \frac{m_2 - 3m_1}{m_1 + m_2}\,\theta_{10}\sqrt{g\ell}} \quad \text{et} \quad \boxed{v_1' = \frac{3m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\,\theta_{10}\sqrt{g\ell}}.$$

REMARQUE : *On observe que v_1' s'obtient de v_2' par une permutation des indices et une symétrie, et vice versa, ce qui était prévisible physiquement.*
En particulier, si $m_2 \gg m_1$ on a

$$\boxed{v_2' \underset{\frac{m_1}{m_2}\to 0}{\longrightarrow} \theta_{10}\sqrt{g\ell} = -v_1} \quad \text{et} \quad \boxed{v_1' \underset{\frac{m_1}{m_2}\to 0}{\longrightarrow} 3\theta_{10}\sqrt{g\ell} = -3v_1}.$$

Donc M_2 poursuit alors sa course sans percevoir le choc, alors que M_1 est repoussée dans le même sens à une vitesse 3 fois supérieure en norme.

e) D'après les conditions initiales en t_1^+, la nouvelle loi horaire s'écrit maintenant $\theta_k(t) = \frac{v_k'}{\ell\omega_0}\sin(\omega_0(t - t_1))$ pour $k = 1, 2$. Comme précédemment, le lien entre amplitude angulaire et vitesse maximale est donc $\theta_{k0}' = \frac{|v_k'|}{\ell\omega_0}$, d'où $\boxed{\theta_{10}' = \frac{|3m_2 - m_1|}{m_1 + m_2}\theta_{10}}$ et $\boxed{\theta_{20}' = \frac{|m_2 - 3m_1|}{m_1 + m_2}\theta_{10}}$.

7. La période étant indépendante de l'amplitude (**isochronisme** pour les petites amplitudes), les deux pendules se rencontrent après une demi-période, de nouveau en $\theta = 0$.

8. **a)** Au bout d'une demi-période, la vitesse est l'opposé de ce qu'elle était à l'instant "initial" t_1. Donc $\boxed{w_1 = -v_1'}$ et $\boxed{w_2 = -v_2'}$.

b) On peut réutiliser les Eqs. (4) en remplaçant v_1 et v_2 par w_1 et w_2, et v_1' et v_2' par w_1' et w_2' :

$$\boxed{w_2' = \frac{2m_1w_1 + (m_2 - m_1)w_2}{m_1 + m_2}} \quad \text{et} \quad \boxed{w_1' = \frac{2m_2w_2 + (m_1 - m_2)w_1}{m_1 + m_2}}.$$

c) D'où $w_2' = -\frac{v_2}{(m_1+m_2)^2}\left(2m_1(3m_2 - m_1) + (m_2 - m_1)(m_2 - 3m_1)\right) = -v_2\frac{m_1^2+m_2^2+2m_1m_2}{(m_1+m_2)^2} = -v_2$, et $w_1' = -\frac{v_2}{(m_1+m_2)^2}\left(2m_2(m_2 - 3m_1) + (m_1 - m_2)(3m_2 - m_1)\right) = v_2\frac{m_1^2+m_2^2+2m_1m_2}{(m_1+m_2)^2} = v_2$.
Finalement $\boxed{w_2' = -v_2 = v_1}$ et $\boxed{w_1' = -v_1 = v_2}$.

d) On a toujours le lien entre vitesse maximale (en $\theta = 0$) et élongation maximale : $w_1' = \sqrt{g\ell}\,\theta_{10}'' = -v_1 = \sqrt{g\ell}\,\theta_{10}$ donc $\boxed{\theta_{10}'' = \theta_{10}}$. Par le même raisonnement on a l'élongation extrême (minimale car négative) $\boxed{\theta_{20}'' = \theta_{20} = -\theta_{10}}$. Ceci peut toujours s'obtenir par un raisonnement énergétique.

9. Au bout de 2 chocs plus un quart de période, le système se retrouve exactement dans le même état à qu'à l'instant initial $t = 0$. Donc le système suit alors une **évolution périodique de période** T_0 en alternant les 2 phases décrites précédemment.

10.

On obtient $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}} = \underline{1,0\text{s}}$, $\underline{\theta_{10}' = 20°}$ et $\underline{\theta_{20}' = 0°}$.
Donc après le premier choc, M_2 reste immobile alors que M_1 admet un mouvement d'amplitude double.