MÉCANIQUE

Soignez la présentation et la rédaction, qui doit être complète et concise. Tout résultat doit être justifié, et mis en valeur. Les résultats littéraux doivent être homogènes. Les résultats numériques doivent avoir un nombre de chiffres significatifs vraissemblable. Les schémas doivent être clairs, suffisamment grands et lisibles. Si vous n'arrivez pas à montrer un résultat, admettez-le clairement et poursuivez.

CALCULATRICES AUTORISÉES

I. Manège pendulaire

L'ensemble du problème sera traité dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ considéré galiléen. Les frottements sont négligés.

Un manège pendulaire est constitué de bras horizontaux de longueur L, placés à une hauteur h au-dessus du plateau, auxquels sont liées des nacelles par une tige rigide de longueur d et dont la masse est négligeable (les liaisons pivot sont considérées parfaites). Les nacelles sont modélisées comme des points matériels de masse m. On note g l'intensité du champ de pesanteur uniforme.
Le manège est entraîné en rotation à une vitesse angulaire ω par rapport au référentiel terrestre, autour de son axe fixe (Oz), le point O étant pris au niveau du plateau. On considère dans toute la suite que cette vitesse angulaire est constante. On note $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$ la base cylindrique orthonormée directe d'axe (Oz).
La fixation permet aux nacelles de basculer dans un plan vertical contenant le bras suspenseur, l'attache faisant alors un angle α avec la verticale (voir figure 1).

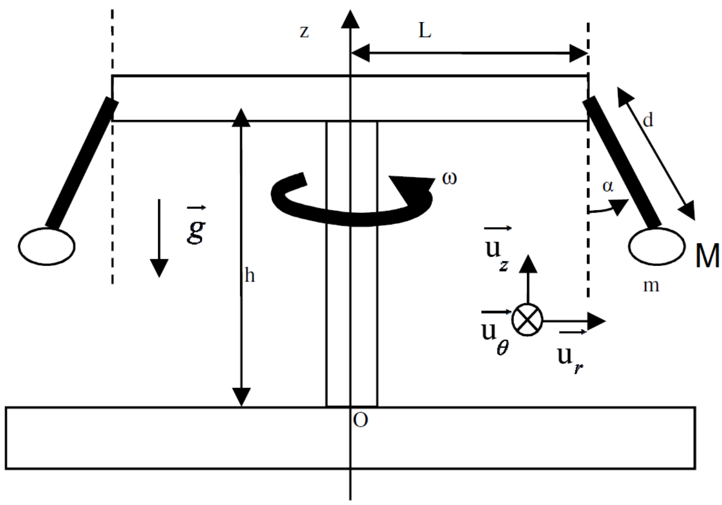


FIGURE 1 – Manège pendulaire.

On s'intéresse à une nacelle, identifiée par le point M représentant sa position.

1. Définir le caractère galiléen d'un référentiel.
Pourquoi le référentiel terrestre peut-il ici être considéré comme galiléen ?

2. Expliciter le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ de la nacelle M dans la base cylindrique.

Pour une vitesse angulaire ω constante, la nacelle reste avec une inclinaison α constante lorsque le régime stationnaire est atteinte. On se placera dans cette situation dans toute la suite du problème.

3. Quelle est alors la trajectoire décrite par la nacelle dans le référentiel terrestre ? Donner son (ses) équation(s) intrinsèque(s) en coordonnées cylindriques.

4. Exprimer les vecteurs vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ de la nacelle de masse m en fonction de L, d, ω et α sur la base cylindrique.

5. Inventorier les forces extérieures exercées sur la nacelle M et les représenter sur un schéma. On admettra que dans les conditions du mouvement, la force exercée par la tige sur la nacelle est colinéaire à la tige.

6. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la nacelle. En déduire l'expression de la norme T de la tension de l'attache reliant la nacelle au bras en fonction de m, g et α.

7. Établir l'équation reliant α et ω. La mettre sous la forme $a(1 + b.\sin\alpha) = \tan\alpha$ et identifier les quantités a et b. Expliquer qualitativement pourquoi la masse m n'intervient pas.

8. Sur un même graphe, tracer l'allure des courbes $\tan\alpha$ et $a(1 + b.\sin\alpha)$ (avec $a > 0$ et $0 < b < 1$) en fonction de α pour $\alpha \in [0, 2\pi]$.
En déduire que l'on obtient deux solutions sur α, à identifier sur le graphe précédent, dont les valeurs α_1 et α_2 sont comprises respectivement sur les intervalles $[0, \pi/2]$ et $[\pi, 3\pi/2]$.

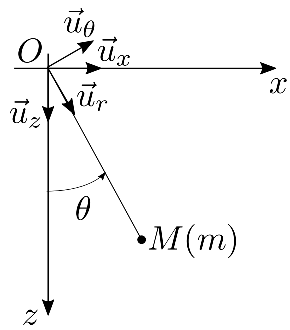
9. Représenter schématiquement la nacelle et les forces qui lui sont appliquées dans ces deux positions. Déterminer dans chaque cas si la position d'équilibre ainsi trouvée est stable ou instable.
Définition : une position d'équilibre est stable (instable) si lorsqu'on en écarte légèrement le système, la somme des forces tend à le ramener vers (l'éloigner de) cette position d'équilibre.

10. On donne $L = 10,0\,\mathrm{m}$, $d = 4,0\,\mathrm{m}$ et $g = 9,8\,\mathrm{m.s^{-2}}$. Quelle est la valeur de la vitesse angulaire ω amenant à $\alpha = 30\,°$? Donner cette valeur en rad.s^{-1} puis en tours par minute (tr.min^{-1}).
Quelle serait alors, exprimée en « g » , l'accélération subie par les passager ?

II. Collisions de deux pendules

II.1. Pendule seul

On considère un point matériel M de masse m accroché à un point fixe O par l'intermédiaire d'un fil inextensible de longueur ℓ et de masse nulle. L'ensemble est situé dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g} = g\vec{u}_z$ (avec $g = 9,81\,\mathrm{m.s^{-2}}$). Le mouvement a lieu dans le plan Oxz. On utilise les coordonnées polaires et la base polaire avec $\theta = (\widehat{\vec{u}_z;\vec{u}_r})$ et $\overrightarrow{OM} = \ell\vec{u}_r$. Le plan est orienté de telle sorte que le sens positif est anti-horaire.



1. Etablir l'équation du différentielle du mouvement vérifiée par θ.

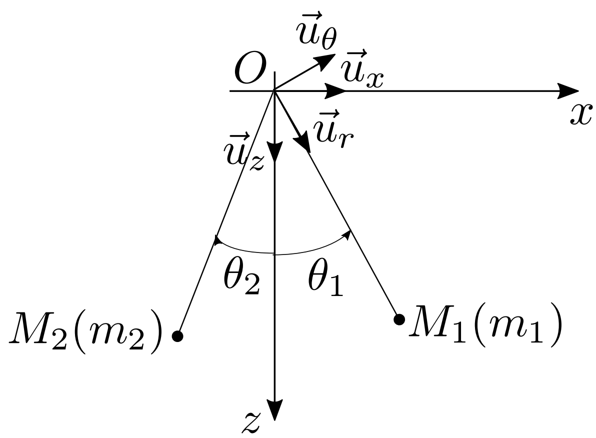
2. Donner la forme simplifiée de cette équation, notée $(\mathcal{E})$, pour des angles θ petits.
En déduire l'expression de la pulsation propre ω_0 et de la période propre T_0 du mouvement.

3. Résoudre $(\mathcal{E})$ en considérant que $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.

4. En considérant les mêmes conditions initiales, calculer la vitesse du point matériel M quand il passe par sa position d'équilibre.

II.2. Système de deux pendules (partie facultative)

On considère deux pendules P_1 et P_2 constitués respectivement de deux points matériels M_1 et M_2 de masse m_1 et m_2, accrochés au même point fixe O à l'aide de deux fils identiques, inextensibles, de masse nulle et de longueur ℓ (figure ci-contre). On repère la position de P_1 par l'angle orienté $\theta_1 = (O_z, \overrightarrow{OM_1})$, et celle de de P_2 par $\theta_2 = (O_z, \overrightarrow{OM_2})$. Donc dans le cas représenté sur la figure on a $\theta_1 > 0$ et $\theta_2 < 0$. Les mouvements des deux pendules ont lieu dans le plan (O_{xz}). On se placera dans le cadre de l'approximation des angles θ_1 et θ_2 petits.
On suppose qu'à l'instant $t = 0$ on lâche les deux pendules sans vitesse initiale, avec $\theta_1(0) = \theta_{10}$ et $\theta_2(0) = \theta_{20} = -\theta_{10}$.



5. A quel instant t_1 a lieu le premier choc entre les deux points matériels M_1 et M_2 et en quel point ?

6. On note $\vec{v_1} = v_1\vec{u}_x$ et $\vec{v_2} = v_2\vec{u}_x$ les vitesses de M_1 et M_2 juste avant le choc. De même, on note $\vec{v_1}' = v_1'\vec{u}_x$ et $\vec{v_2}' = v_2'\vec{u}_x$ les vitesses de M_1 et M_2 juste après le choc.

a) Donner l'expression de v_1 et v_2 en fonction des conditions initiales.

b) On admet que lors d'un choc, la quantité de mouvement totale du système de deux points matériels est conservée. En déduire une relation (1) entre v_1, v_2, v_1' et v_2'.

c) De plus le choc est supposé *élastique*, c'est-à-dire que l'énergie cinétique totale du système de deux points matériels est elle aussi conservée. En déduire, en utilisant la relation (1), que

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2' \,.$$

d) En déduire les expressions de v_1' et v_2' en fonction de θ_{10} et des constantes du problème. Que se passe-t-il dans le cas particulier où $m_2 \gg m_1$?

e) On se replace dans le cas général de masses quelconques. En déduire finalement les élongations angulaires maximales θ_{10}' et θ_{20}' des deux pendules après ce choc.

7. A quel instant t_2 a lieu le deuxième choc, et en quel point ?

8. On note $\overrightarrow{w_1} = w_1\vec{u}_x$ et $\overrightarrow{w_2} = w_2\vec{u}_x$ les vitesses de M_1 et M_2 juste avant le second choc, et $\overrightarrow{w_1}' = w_1'\vec{u}_x$ et $\overrightarrow{w_2}' = w_2'\vec{u}_x$ les vitesses juste après.

a) Donner l'expression de w_1 et w_2 en fonction de v_1' et v_2'.

b) On suppose de nouveau que le choc est élastique. En utilisant une démarche similaire à celle de la question **6.**, déterminer w_1' et w_2' en fonction de w_1 et w_2.

c) En déduire w_1' et w_2' en fonction de v_1 et v_2.

d) En déduire que les élongations maximales après le second choc sont $\theta_{10}'' = \theta_{10}$ et $\theta_{20}'' = \theta_{20}$.

9. Décrire qualitativement l'évolution ultérieure du système.

10. Tracer sur le même graphique les évolutions de θ_1 et θ_2 en fonction du temps pour $0 \leq t \leq 3$s, dans le cas où : $\ell = 25\,\text{cm}$, $\theta_{01} = 10°$, $\theta_{02} = -10°$, $\text{m}_1 = 1\,\text{kg}$ et $m_2 = 3\,\text{kg}$.