

MÉCANIQUE et THERMODYNAMIQUE

I. Motocyclette (d'après CCP MP 2013)

I.1. Démarrage

1. Le Théorème de la Résultante Cinétique (TRC) appliqué au système { moto + conducteur } dans \mathcal{R} galiléen s'écrit $M\dot{v}\vec{e}_x = \vec{N}_1 + \vec{T}_1 + \vec{N}_2 + \vec{T}_2 + M\vec{g}$, d'où après projection :

$$\boxed{M\dot{v} = T_1 + T_2} \quad (1) \quad \boxed{Mg = N_1 + N_2} \quad (2)$$

2. La route étant fixe dans \mathcal{R} , on écrit que la vitesse de la roue au point de contact est nulle en l'absence de glissement. D'après le champ des vitesses dans un solide pour la roue $i = 1$ ou 2 on obtient :

$$\vec{v}_{I_i} = \vec{v}_{O_i} + \omega_i \vec{e}_z \wedge \overrightarrow{O_i I_i} \Leftrightarrow \vec{0} = v\vec{e}_x + R_i \omega_i \vec{e}_x.$$

Après projection on obtient

$$\boxed{\omega_1 = -\frac{v}{r_1}} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega_2 = -\frac{v}{r_2}}.$$

3. On applique la définition et le champ des vitesses dans un solide en notant M_i les N points d'une roue, et $(\vec{e}_{r_i}, \vec{e}_{\theta_i})$ la base polaire associée :

$$\vec{\sigma}_1(O_1) = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{O_1 M_i} \wedge m_i \vec{v}_{M_i} = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{O_1 M_i} \wedge m_i (\vec{v}_{O_1} + \omega_1 \vec{e}_z \wedge \overrightarrow{O_1 M_i}) = \left(\sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{O_1 M_i} \right) \wedge \vec{v}_{O_1} + \sum_{i=1}^N \overrightarrow{O_1 M_i} \wedge (\omega_1 \vec{e}_z \wedge \overrightarrow{O_1 M_i})$$

Or O_1 est le barycentre de la roue donc $\sum_i m_i \overrightarrow{O_1 M_i} = \vec{0}$, d'où

$$\vec{\sigma}_1(O_1) = \sum_{i=1}^N O_1 M_i \vec{e}_{r_i} \wedge (\omega_1 \vec{e}_z \wedge O_1 M_i \vec{e}_{r_i}) = \omega_1 \sum_{i=1}^N m_i O_1 M_i^2 \vec{e}_{r_i} \wedge \vec{e}_{\theta_i} = \omega_1 \left(\sum_{i=1}^N m_i O_1 M_i^2 \right) \vec{e}_z.$$

En appliquant le même raisonnement pour la roue 2 on obtient finalement

$$\boxed{\vec{\sigma}_1(O_1) = J_1 \omega_1 \vec{e}_z} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{\sigma}_2(O_2) = J_2 \omega_2 \vec{e}_z}.$$

4. On décompose le système en { roue 1 + roue 2 + reste }, le reste étant un solide en translation à la vitesse $v\vec{e}_x$ et de centre de masse noté G_0 , et on utilise les propriétés des barycentres partiels :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}(G) &= \sum_{i \in \text{roue 1}} (\overrightarrow{G O_1} + \overrightarrow{O_1 M_i}) \wedge m_i \vec{v}_{M_i} + \sum_{i \in \text{roue 2}} (\overrightarrow{G O_2} + \overrightarrow{O_2 M_i}) \wedge m_i \vec{v}_{M_i} + \left(\sum_{i \in \text{reste}} m_i \overrightarrow{G M_i} \right) \wedge v\vec{e}_x \\ &= \overrightarrow{G O_1} \wedge \left(\sum_{i \in \text{roue 1}} m_i \vec{v}_{M_i} \right) + \vec{\sigma}_1(O_1) + \overrightarrow{G O_2} \wedge \left(\sum_{i \in \text{roue 2}} m_i \vec{v}_{M_i} \right) + \vec{\sigma}_2(O_2) + \left(\sum_{i \in \text{reste}} m_i \overrightarrow{G M_i} \right) \wedge v\vec{e}_x \\ &= \vec{\sigma}_1(O_1) + \vec{\sigma}_2(O_2) + \overrightarrow{G O_1} \wedge m_{\text{roue 1}} \vec{v}_{O_1} + \overrightarrow{G O_2} \wedge m_{\text{roue 2}} \vec{v}_{O_2} + m_{\text{reste}} \overrightarrow{G G_0} \wedge v\vec{e}_x \\ &= \vec{\sigma}_1(O_1) + \vec{\sigma}_2(O_2) + (m_{\text{roue 1}} \overrightarrow{G O_1} + m_{\text{roue 2}} \overrightarrow{G O_2} + m_{\text{reste}} \overrightarrow{G G_0}) \wedge v\vec{e}_x \\ &= \vec{\sigma}_1(O_1) + \vec{\sigma}_2(O_2) + \vec{0} \wedge v\vec{e}_x \quad \text{d'où} \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{\sigma}(G) = \vec{\sigma}_1(O_1) + \vec{\sigma}_2(O_2)}.$$

5. Le Théorème du Moment Cinétique (TMC) appliqué à la roue 1 en O_1 s'écrit

$$\left. \frac{d\vec{\sigma}_1(O_1)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\mathcal{M}}_{\text{pes}}(O_1) + \vec{\mathcal{M}}_{\text{contact}}(O_1) + \vec{\mathcal{M}}_{\text{pivot}}(O_1)$$

La pesanteur a pour point d'application O_1 et les forces de réaction ont pour point d'application I_1 car le contact est supposé ponctuel :

$$\left. \frac{d\vec{\sigma}_1(O_1)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{O_1 O_1} \wedge m_{\text{roue 1}} \vec{g} + \overrightarrow{I_1 O_1} \wedge (\vec{T}_1 + \vec{N}_1) + \vec{\mathcal{M}}_{\text{pivot}}(O_1) = \vec{0} + r_1 T_1 \vec{e}_z + \vec{0} + \vec{\mathcal{M}}_{\text{pivot}}(O_1)$$

On projette selon \vec{e}_z , et on utilise la condition de non glissement $\omega_1 = -\frac{v}{r_1}$ d'une part, et que la liaison pivot est parfaite d'autre part, donc $\vec{e}_z \cdot \vec{\mathcal{M}}_{\text{pivot}}(O_1) = 0$, d'où

$$\boxed{-\frac{J_1}{r_1} \dot{v} = r_1 T_1} \Leftrightarrow \boxed{T_1 = -\frac{J_1}{r_1^2} \dot{v}}. \quad (3)$$

6. De même on applique le TMC en G au système total. Les actions extérieures se réduisent maintenant aux poids et aux actions de contact, qui ont toutes un point d'application :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{\sigma}(G)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} &= \frac{d}{dt} (\vec{\sigma}_1(O_1) + \vec{\sigma}_2(O_2)) \Big|_{\mathcal{R}} = \vec{\mathcal{M}}_{\text{pes}}(G) + \vec{\mathcal{M}}_{\text{contact}}(G) \\ &= \overrightarrow{G G} \wedge M \vec{g} + \overrightarrow{G I_1} \wedge (\vec{T}_1 + \vec{N}_1) + \overrightarrow{G I_2} \wedge (\vec{T}_2 + \vec{N}_2) \\ J_1 \omega_1 \vec{e}_z + J_2 \omega_2 \vec{e}_z &= \vec{0} + (d_1 \vec{e}_x - h \vec{e}_y) \wedge (T_1 \vec{e}_x + N_1 \vec{e}_y) + (-d_2 \vec{e}_x - h \vec{e}_y) \wedge (T_2 \vec{e}_x + N_2 \vec{e}_y) \end{aligned}$$

Après projection selon \vec{e}_z et injection des conditions de non glissement cela donne :

$$\boxed{-\left(\frac{J_1}{r_1} + \frac{J_2}{r_2} \right) \dot{v} = d_1 N_1 - d_2 N_2 + h(T_1 + T_2)} \quad (4)$$

7. L'Eq. (3) et l'Eq. (1) nous conduisent à

$$\boxed{T_1 = -\frac{J_1}{r_1^2} \dot{v}} \quad \text{et} \quad \boxed{T_2 = \left(M + \frac{J_1}{r_1^2} \right) \dot{v}}.$$

En injectant l'Eq. (1) dans l'Eq. (4) on obtient

$$-\left(hM + \frac{J_1}{r_1} + \frac{J_2}{r_2} \right) \dot{v} = d_1 N_1 - d_2 N_2$$

qui associée à l'Eq. (2) conduit à

$$\boxed{N_1 = \frac{d_2}{d_1 + d_2} Mg - \frac{\dot{v}}{d_1 + d_2} \left(hM + \frac{J_1}{r_1} + \frac{J_2}{r_2} \right)} \quad \text{et} \quad \boxed{N_2 = \frac{d_1}{d_1 + d_2} Mg + \frac{\dot{v}}{d_1 + d_2} \left(hM + \frac{J_1}{r_1} + \frac{J_2}{r_2} \right)}.$$

8. On obtient $N_1 = 7,7 \times 10^2 \text{ N}$ et $N_2 = 2,2 \times 10^3 \text{ N}$. Les deux valeurs étant positives, il n'y a pas de contradiction avec l'hypothèse de contact. La moto ne décolle pas.

REMARQUE : La pertinence de ce résultat nécessite tout de même de vérifier que la condition de non glissement est aussi vérifiée, cf question suivante !

9. On obtient $T_1 = -24 \text{ N}$ et $T_2 = 3,3 \times 10^2 \text{ N}$. La condition de non glissement selon la loi de Coulomb du frottement solide $|T_1| < fN_1$ et $|T_2| < fN_2$ est vérifiée pour les 2 forces, ce qui justifie a posteriori l'hypothèse cinématique.

REMARQUE : $T_1 < 0$ car c'est elle qui met en mouvement la roue avant non motrice, alors que $T_2 > 0$ ce qui permet de faire avancer la moto en présence d'un couple moteur sur cette roue, car $T_1 + T_2 = M\dot{v} > 0$.

10. → Première méthode : on applique le TMC en O_2 à la roue arrière en présence du couple moteur de moment résultant $\Gamma \vec{e}_z$ et pour une liaison pivot parfaite. En reprenant les mêmes argument qu'en 5., on obtient selon \vec{e}_z

$$-\frac{J_2}{r_2} \dot{v} = r_2 T_2 + \Gamma \Rightarrow \Gamma = -r_2 \left(M + \frac{J_1}{r_1^2} + \frac{J_2}{r_2^2} \right) \dot{v} = \underline{-1,8 \times 10^2 \text{ N.m.}}$$

- Deuxième méthode : on applique le théorème de l'énergie mécanique au système global, dans \mathcal{R} galiléen. L'énergie cinétique totale est obtenue en faisant la somme de l'énergie cinétique globale de translation et des énergies cinétiques de rotation des deux roues autour de chaque axe¹.

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 \right) = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}} = \mathcal{P}_{\text{contact}} + \mathcal{P}_{\text{pes}} + \mathcal{P}_{\text{pivot1}} + \mathcal{P}_{\text{pivot2}} + \mathcal{P}_{\text{moteur}}$$

Or on a

- $\mathcal{P}_{\text{contact}} = 0$ car il n'y a pas glissement sur la route (qui est immobile!);
- $\mathcal{P}_{\text{pes}} = M \vec{g} \cdot \vec{v} = 0$ pour un mouvement horizontal;
- $\mathcal{P}_{\text{pivot1}} = \vec{\mathcal{M}}_{\text{pivot1}}(O_1) \cdot \omega_1 \vec{e}_z = 0$ car la liaison est parfaite, et de même pour $\mathcal{P}_{\text{pivot2}}$;
- $\mathcal{P}_{\text{moteur}} = \Gamma \vec{e}_z \cdot \omega_2 \vec{e}_z = \Gamma \omega_2$.

En utilisant les relation cinématiques de non glissement (question 2.) on obtient

$$\forall t, \left(M + \frac{J_1}{r_1^2} + \frac{J_2}{r_2^2} \right) v \dot{v} = \Gamma \omega_2 = -\Gamma \frac{v}{r_2} \Leftrightarrow \Gamma = -r_2 \left(M + \frac{J_1}{r_1^2} + \frac{J_2}{r_2^2} \right) \dot{v} = \underline{-1,8 \times 10^2 \text{ N.m.}}$$

I.2. Roue arrière

11. On utilise la relation de changement de point et le résultat de la question 4., en l'absence de contact sur la roue avant :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}(O_2) &= \vec{\sigma}(G) + \overrightarrow{O_2 G} \wedge \left(\sum_i m_i \vec{v}_i \right) \\ &= \vec{\sigma}_1(O_1) + \vec{\sigma}_2(O_2) + (d_2 \vec{e}_x' + (h - r_2) \vec{e}_y') \wedge M \vec{v}_G \quad \text{avec} \quad \vec{v}_G = v \vec{e}_x \\ &= J_1 \omega_1 \vec{e}_z + J_2 \omega_2 \vec{e}_z - M(h - r_2) v \vec{e}_z \end{aligned}$$

d'où en négligeant le mouvement de la roue avant, et avec la condition de non glissement de la roue arrière :

$$\vec{\sigma}(O_2) \approx \left(-\frac{J_2}{r_2} + M(r_2 - h) \right) v \vec{e}_z.$$

12. Les actions extérieures ont toutes un point d'application :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}(O_2) &= \overrightarrow{O_2 G} \wedge M \vec{g} + \overrightarrow{O_2 I_2} \wedge \left(\vec{T}_2 + \vec{N}_2 \right) \\ &= (d_2 \vec{e}_x' + (h - r_2) \vec{e}_y') \wedge M g (-\sin \theta \vec{e}_x' - \cos \theta \vec{e}_y') - r_2 \vec{e}_y \wedge (T_2 \vec{e}_x + N_2 \vec{e}_y) \quad \text{d'où} \end{aligned}$$

$$\vec{\mathcal{M}}(O_2) = [M g (-d_2 \cos \theta + (h - r_2) \sin \theta) + r_2 T_2] \vec{e}_z.$$

13. Le TMC appliqué en O_2 au système global s'écrit maintenant, en projection selon \vec{e}_z :

$$\left(-\frac{J_2}{r_2} + M(r_2 - h) \right) \dot{v} = M g (-d_2 \cos \theta + (h - r_2) \sin \theta) + r_2 T_2.$$

1. Théorème de Koenig, hors programme depuis 2014...! mais que l'on peut vous faire redémontrer comme ci-dessus pour la décomposition du moment cinétique.

Comme précédemment, on applique aussi le TRC au même système, ce qui donne selon \vec{e}_x : $M \dot{v} = T_2$. Ceci conduit à une égalité sur la fonction de θ sans dimension

$$f(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \cos \theta - \frac{h - r_2}{d_2} \sin \theta = \left(\frac{J_2}{M r_2 d_2} + \frac{h}{d_2} \right) \frac{\dot{v}}{g} \approx 0,05.$$

D'après le graphe proposé dans l'énoncé², on obtient $\theta \approx 38^\circ$.

I.3. Frottement fluide

14. D'après la question 10. et la condition cinématique de non glissement (question 2.), l'énergie mécanique totale de la moto+conducteur s'écrit : $\frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} \left(M + \frac{J_1}{r_1^2} + \frac{J_2}{r_2^2} \right) v^2$, et le théorème de l'énergie mécanique appliqué à ce système, en l'absence de puissance des forces intérieures s'écrit maintenant :

$$\left(M + \frac{J_1}{r_1^2} + \frac{J_2}{r_2^2} \right) v \dot{v} = -\Gamma \frac{v}{r_2} - k v^3, \quad \forall t \Leftrightarrow \left(M + \frac{J_1}{r_1^2} + \frac{J_2}{r_2^2} \right) \dot{v} = -\frac{\Gamma}{r_2} - k v^2, \quad \forall t,$$

après simplification par v en présence de mouvement.

15. Comme $\Gamma < 0$, l'équation ci-dessus montre que lorsque v est faible (avec $v > 0$), $\dot{v} > 0$ donc le véhicule accentue sa vitesse. Mais plus v est grand plus l'accélération s'affaiblit à cause du terme de frottement. Finalement on peut supposer que le véhicule tend vers une vitesse limite constante v_ℓ . Ceci conduit à l'équation

$$0 = -\frac{\Gamma}{r_2} - k v_\ell^2 \Leftrightarrow v_\ell = \sqrt{-\frac{\Gamma}{k r_2}}.$$

L'équivalence confirme l'existence de cette solution.

16. On en déduit $\dot{v} + a v^2 = a v_\ell^2$ avec $a = \frac{k}{M + \frac{J_1}{r_1^2} + \frac{J_2}{r_2^2}}$.

17. → Première méthode : par séparation des variables on obtient $\frac{dv}{v_\ell^2 - v^2} = a dt$. La fraction rationnelle se décompose en éléments simples selon : $\frac{1}{v_\ell^2 - v^2} = -\frac{1}{2v_\ell(v - v_\ell)} + \frac{1}{2v_\ell(v + v_\ell)}$. L'intégration entre $t = 0$ et t conduit à

$$-\ln |v - v_\ell| + \ln v_\ell + \ln(v + v_\ell) - \ln v_\ell = 2v_\ell a t \Leftrightarrow \ln \frac{v + v_\ell}{v_\ell - v} = 2v_\ell a t \Leftrightarrow v = v_\ell \frac{1 - e^{-2v_\ell a t}}{1 + e^{-2v_\ell a t}}.$$

Remarque : on retrouve bien que $v \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} v_\ell$.

- Méthode suggérée par l'énoncé (changement de fonction) : posons $u = \left(1 - \frac{v}{v_\ell}\right)^{-1}$, ce qui implique $v = v_\ell \frac{u-1}{u}$ d'une part et $\dot{v} = v_\ell \frac{\dot{u}}{u^2}$. Réinjectées dans l'équation différentielle, ceci conduit après simplification à l'équation suivante :

$$\dot{u} - 2a v_\ell u = -a v_\ell \quad \text{avec} \quad u(0) = 1 \Leftrightarrow u(t) = \frac{1}{2} e^{2a v_\ell t} + \frac{1}{2}.$$

Après inversion on retrouve $v = v_\ell \frac{1 - e^{-2v_\ell a t}}{1 + e^{-2v_\ell a t}}$.

2. Après correction de l'erreur d'énoncé sur le graphe...

II. Jean Perrin et la mesure de la constante d'Avogadro (d'après Concours Général 2011)

1. On applique le Théorème de la Résultante Cinétique (TRC) à une tranche de fluide parallélépipédique de hauteur infinitésimale dz et de surface horizontale S . **SCHEMA** À l'équilibre la force de pesanteur est compensée par la résultante des forces de pression, qui se limite aux forces verticales sur les parois horizontales car les autres se compensent puisque la pression p ne dépend que de z . On obtient $0 = -\rho S dz g + p(z)S - p(z+dz)S$ d'où l'équation de la statique $\frac{dp}{dz} = -\rho g$.

2. L'équation d'état du gaz parfait s'écrit $p = \frac{\rho RT_0}{M}$ d'où $\rho = \frac{Mp}{RT_0} = \frac{mp}{k_B T_0}$ car $R = N_A k_B$.

3. En rassemblant ces deux équations on obtient : $\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{mg}{k_B T_0} p \Leftrightarrow \frac{dp}{p} + \frac{mg}{k_B T_0} dz = 0$. La solution de cette équation différentielle du 1er ordre, linéaire et à coefficients constants est : $p(z) = p(0) \exp\left(-\frac{mgz}{k_B T_0}\right)$.

4. D'après l'équation d'état du gaz parfait $p = n^* k_B T_0$, d'où $n^*(z) = n^*(0) \exp\left(-\frac{mgz}{k_B T_0}\right)$ avec $n(0) = \frac{p(0)}{k_B T_0}$.

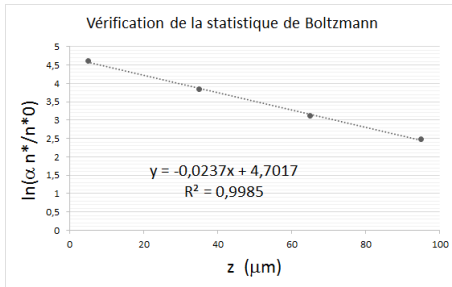
5. Les forces s'exerçant sur la sphère de gomme-gutte de volume $\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi r^3$ sont le **pooids** $\mathcal{V}\rho\vec{g}$ et la **poussée d'Archimède** $-\mathcal{V}\rho_0\vec{g}$. Le travail élémentaire de la résultante des forces s'écrit :

$$\delta W = \mathcal{V}(\rho - \rho_0)\vec{g} \cdot d\vec{z} = \mathcal{V}(\rho_0 - \rho)gdz = d(\mathcal{V}(\rho_0 - \rho)gz)$$

Le **système** est donc bien **conservatif** et on pose $E_p = \frac{4}{3}\pi r^3(\rho - \rho_0)gz + 0$.

6. Avec l'expression de E_p on a : $\ln\left(\frac{n^*}{n_0^*}\right) = az$ avec $a = -\frac{(4/3)\pi r^3(\rho - \rho_0)gz}{k_B T_0}$.

On note α la constante de proportionnalité introduite dans les données de densité particulaire. On vérifie alors graphiquement et via une régression linéaire que $\ln\left(\alpha \frac{n^*}{n_0^*}\right)$ décroît bien de façon affine avec z :



z (μm)	5	35	65	95
$\alpha \times n^*/n_0^*$	100	47	22,6	12
$\ln(\alpha \times n^*/n_0^*)$	4,61	3,85	3,12	2,48

Les différents points (bien qu'il n'y ait que 4 mesures) s'alignent bien, le coefficient de corrélation est proche de 1. On peut donc considérer que n^* décroît bien exponentiellement selon le facteur de Boltzmann.

7. La pente $a = -0,0237 \mu\text{m}^{-1}$ de la courbe tracée correspond à $\frac{4\pi r^3(\rho_0 - \rho)N_A g}{3RT_0}$ (et l'ordonnée à l'origine à $\ln \alpha$). Donc : $N_A = \frac{a \times 3RT_0}{4\pi r^3(\rho_0 - \rho)g} = 7,57 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$. La valeur trouvée est du bon ordre de grandeur, supérieure de 25% à la valeur admise, ce qui est remarquable compte tenu du comptage direct des sphères et des étapes de sélection des sphères selon leur taille notamment (par centrifugation).

III. Montée de sève (d'après X PC 2001)

III.1. Poussée atmosphérique

- On intègre la loi de la statique des fluides $dp = -\rho g dz$ (pour un axe Oz ascendant) entre l'altitude de la base de la colonne $z_0 = 0$ et celle du haut $z_0 + h = h$. On obtient $p(h) = p_0 - \rho gh$.
- Une aspiration sous vide correspond à $p(h) = 0$ donc $h_A = \frac{p_0}{\rho g} = 10,3 \text{ m}$.

III.2. La capillarité

- La pression juste sous le ménisque s'écrit à la fois $p_0 - \rho gh$ par équilibre hydrostatique, mais aussi $p_0 - \frac{2\sigma}{r}$ par équilibre de tension superficielle. Ceci conduit à $h = \frac{2\sigma}{\rho g r}$. Or le rayon de courbure vaut $r = \frac{R}{\cos \psi}$. **SCHEMA** D'où $h = 2 \frac{\lambda_C^2}{R} \cos \psi$ avec $\lambda_C = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}$ une grandeur homogène à une longueur. λ_C s'appelle la *longueur capillaire*. Elle détermine l'échelle de transition entre le cas où les forces de tension superficielle sont négligeables devant celles de pesanteur ($\lambda_C \ll R$) et le cas contraire ($\lambda_C \gg R$).
- Si $\psi > \frac{\pi}{2}$, la surface est alors « bombée », et le ménisque est situé sous le niveau du liquide en dehors du tube car sa convexité implique une surpression dans le liquide.
- On obtient $\lambda_C = 2,73 \text{ mm}$ pour l'eau. On en déduit des élévations maximales $h_C = 59 \text{ cm}$ pour les conifères et $h_C = 7,4 \text{ cm}$ pour le chêne.

III.3. La perte de charge

- SCHEMA** Le volume élémentaire dV de liquide qui va traverser une section donnée de cylindre entre t et $t + dt$ est lui-même un cylindre de section πR^2 et de hauteur $d\ell = v_a dt$. On a donc $dV = \pi R^2 v_a dt$. Le débit volumique est donc $Q = \frac{dV}{dt} = \pi R^2 v_a$.
- On obtient une perte de charge par unité de longueur $\frac{\Delta p}{h} = \frac{8\eta v_a}{R^2}$. On obtient $1,8 \text{ kPa.m}^{-1}$ pour les conifères et $2,8 \text{ kPa.m}^{-1}$ pour le chêne. Cette valeur est donc de l'ordre de 20-25% du gradient de pression hydrostatique $\rho g \approx 10 \text{ kPa.m}^{-1}$, ce qui n'est pas négligeable, et joue encore en défaveur de la montée de sève.
- Les canaux réels ne sont pas parfaitement cylindriques ni rectilignes. De plus ils sont réticulés. Toutes ces irrégularités engendrent encore plus de pertes visqueuses.

III.4. La transpiration

- En notant ρ_{Hg} la masse volumique du mercure, on a donc une pression $p(h) = p_0 - \rho_{\text{Hg}}gh$ au niveau de l'interface eau-mercure si elle est située à une hauteur h du niveau d'eau dans la bouteille (qui lui est au contact de l'air ambiant à la pression p_0). La valeur de ρ_{Hg} n'est pas donnée, mais on sait d'après les données que $p_0 = \rho_{\text{Hg}}gh_0$ avec $h_0 = 760 \text{ mmHg}$. On en déduit $p(h) = p_0 \left(1 - \frac{h}{h_0}\right) = -0,32 \text{ bar}$. Ceci est remarquable à double titre. Tout d'abord une pression négative ne correspond pas à un équilibre car à très basse pression l'eau comme le mercure devraient passer à l'état gazeux. Donc des bulles devraient apparaître au bout d'un certain temps, il s'agit d'un état métastable. D'autre part en valeur absolue il s'agit d'une traction forte car presque comparable à la pression atmosphérique.

- Au niveau de l'extrémité des pores, la sève liquide en cours de vaporisation est en contact avec l'air ambiant à la pression p_0 . Il existe donc une dépression $\Delta p = p_0 - p(h) = 1,3 \text{ bar}$ au niveau du ménisque

de fin de pore. D'après la question 3., on a donc en supposant un angle $\psi = 0$ (*mouillage parfait*) $\Delta p = \frac{2\sigma}{R}$

d'où $R = \frac{2\sigma}{\Delta p} = 1,1 \mu\text{m}$.

11. Il est plus facile d'isoler p en fonction de v : $p = -\frac{a}{v^2} + \frac{RT}{v-b}$. On peut alors calculer

$$\chi_T^{-1} = -v \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_T^{-1} = -v \left(\frac{2a}{v^3} - \frac{RT}{(v-b)^2} \right)^{-1} \Rightarrow \chi_T = -\frac{1}{v} \left(\frac{2a}{v^3} - \frac{RT}{(v-b)^2} \right)^{-1}$$

Par l'absurde, si $\chi_T < 0$ alors le système verrait sa pression augmenter lors d'une augmentation de volume, ou diminuer lors d'une contraction. Il serait alors **instable mécaniquement** car il imploserait ou exploserait à la moindre perturbation. On doit donc avoir $\chi_T > 0$ pour que le fluide soit stable.

12. D'après l'équation précédente, $\chi_T^{-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{(v-b)^2}{v^3} = \frac{RT}{2a}$. On voit ici qu'à chaque valeur de T correspond une (ou plusieurs) valeur(s) de v telle que le fluide devient instable (car les variations de volume deviennent infiniment grande, ce qui traduit que χ_T va changer de signe), sauf s'il n'y a pas de solution.

13. Pour obtenir la coordonnée p du point de la spinodale pour chaque valeur de v et T , il faut réinjecter l'équation précédente dans l'équation de Van Der Waals en éliminant la température. Cela conduit à

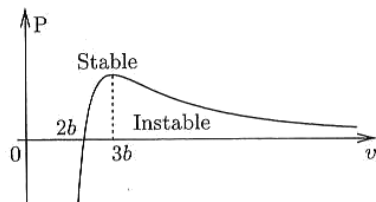
$$p = f(v) = \frac{a}{v^2} \left(1 - \frac{2b}{v} \right)$$

14.

On obtient l'allure ci-contre. Le fluide est instable si

$$\chi_T^{-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{(v-b)^2}{v^3} > \frac{RT}{2a} \Leftrightarrow p < f(v),$$

donc sous la courbe.



15. Le sommet C de la spinodale vérifie $f'(v_C) = \frac{2a}{v^3} \left(-1 + \frac{3b}{v} \right) = 0 \Leftrightarrow v_C = 3b$. D'où $p_C = \frac{a}{27b^2}$.

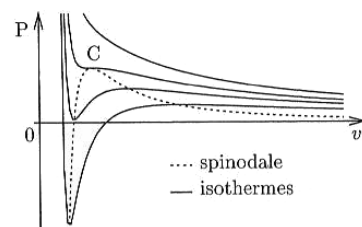
On en déduit la température correspondante via $T_C = \frac{2a}{R} \frac{(v-b)^2}{v^3}$ d'où $T_C = \frac{8a}{27bR}$.

16. Tout d'abord on observe les comportements asymptotiques suivants sur une isotherme ($T = \text{constante}$) :

$$p \xrightarrow[v \rightarrow b]{} \infty \quad \text{et} \quad p \xrightarrow[v \rightarrow \infty]{} 0$$

De plus, la pente de l'isotherme est du signe de $-\chi_T$. Compte-tenu de l'étude qui précède on en déduit que la pente est nulle sur la spinodale (par définition), négative là où le fluide est stable et positive là où il est instable. Il existe donc 3 types d'isothermes (cf graphe ci-dessous) :

- celles qui traversent la spinodale en deux points (décroissante, croissante, décroissante) ; ce sont les *isothermes sub-critiques* ;
- celle qui est tangente à la spinodale en un seul point, nécessairement le point C (car cette tangente est horizontale) ; il s'agit de l'*isotherme critique* ;
- celles qui ne traversent jamais la spinodale et sont donc strictement décroissantes ; ce sont les *isothermes sur-critiques*.



17. Les isothermes sub-critiques présentent une zone instable sous la spinodale, et stable en dehors donc là où la pente est positive. On ne peut donc observer le fluide pour des valeurs intermédiaires de v .

Toutefois, l'étude complète montre que le système trouve son équilibre en se scindant en 2 phases distinctes A et B dont l'une est dense (liquide) et l'autre plus diluée (gaz), de telle sorte que la pression soit fixée sur une isotherme (c'est la *pression de saturation*^a). La différence entre ces 2 phases s'amenuise à mesure que la température se rapproche de T_C . Chacune des phases correspond à un point stable sur l'isotherme de Van Der Waals (cf graphe ci-contre).

^a. cf cours sur les changements d'état.

