

MÉCANIQUE et THERMODYNAMIQUE

CALCULATRICES AUTORISÉES

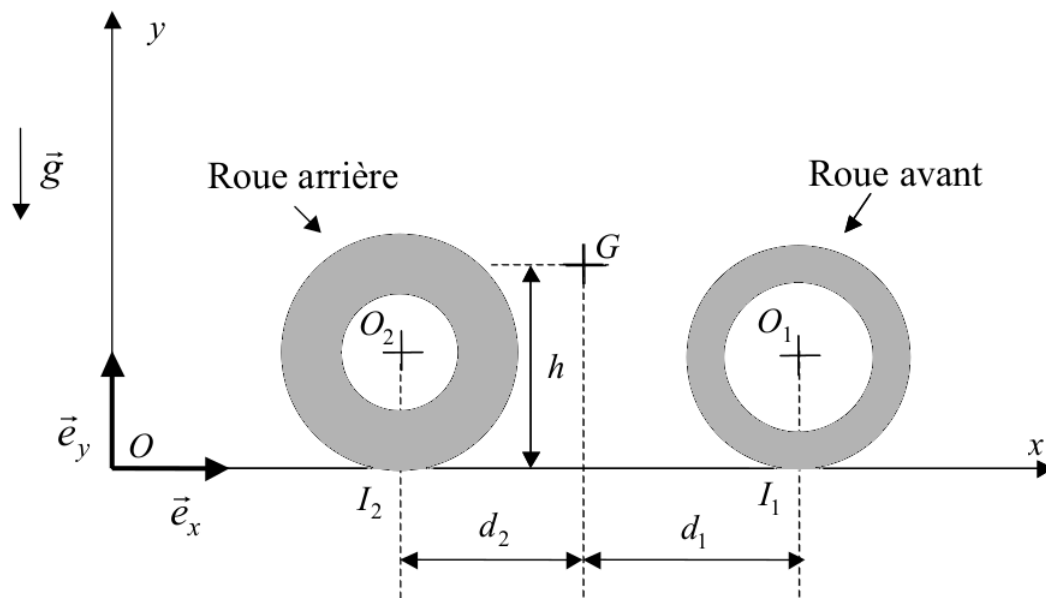
I. Motocyclette

On étudie un système constitué d'une motocyclette et de son conducteur, dans un référentiel \mathcal{R} supposé galiléen, auquel on associe un repère $Oxyz$ (axe Ox horizontal). L'accélération de la pesanteur est notée $\vec{g} = -g\vec{e}_y$, avec $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$. La masse totale du système est $M = 300 \text{ kg}$, la position de son centre de masse G est caractérisée par les distances $d_1 = 0,7 \text{ m}$, $d_2 = 0,4 \text{ m}$ et $h = 1 \text{ m}$ (voir figure ci-dessous). La roue avant, pneu inclus, de centre O_1 , possède un rayon $r_1 = 0,5 \text{ m}$ et un moment d'inertie $J_1 = 6 \text{ kg.m}^{-2}$ relativement à un axe (O_1, \vec{e}_z) . La roue arrière, pneu inclus, de centre O_2 , possède un rayon $r_2 = 0,52 \text{ m}$ et un moment d'inertie $J_2 = 10 \text{ kg.m}^{-2}$ relativement à un axe (O_2, \vec{e}_z) .

Lorsque la moto se déplace, les deux roues sont en contact avec la chaussée supposée horizontale. Les points de contact des roues avant et arrière sont notés I_1 et I_2 . Les réactions du sol sur les roues sont respectivement $\vec{R}_1 = T_1\vec{e}_x + N_1\vec{e}_y$ et $\vec{R}_2 = T_2\vec{e}_x + N_2\vec{e}_y$. Les liaisons pivot des roues sont supposées parfaites. La roue avant est non motrice, alors que la roue arrière est soumise à un couple de moment résultant $\Gamma.\vec{e}_z$ ($\Gamma < 0$). Le coefficient de frottement des roues sur le sol est $f = 0,8$; il ne sera pas fait de distinction entre le coefficient de frottement statique et le coefficient de frottement dynamique.

On note $\vec{v} = v\vec{e}_x$ la vitesse de translation de l'ensemble à l'instant t (on se limitera au cas $v > 0$), et $\omega_1\vec{e}_z$ et $\omega_2\vec{e}_z$ les vitesses de rotation instantanées des roues avant et arrière. On supposera toujours que les roues roulent sans glisser sur le sol.

Enfin, pour les questions allant de **1.** à **13.**, on négligera l'action de l'air ambiant sur la moto et son conducteur (il peut s'agir, par exemple, d'une phase de démarrage pour laquelle la vitesse n'est pas élevée).



I.1. Démarrage

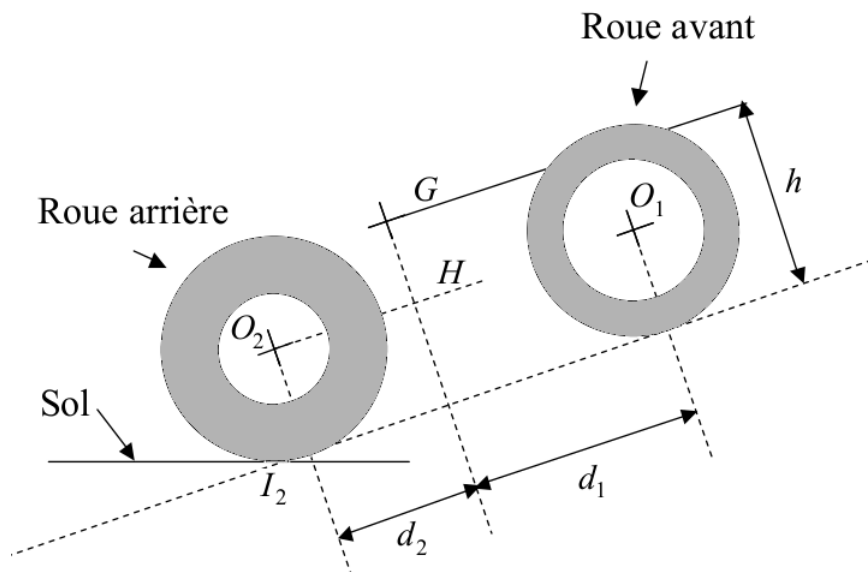
1. En utilisant le théorème de la résultante cinétique, donner deux expressions (1) et (2) liant N_1 , N_2 , T_1 , T_2 , M , g , et \dot{v} (accélération instantanée).
2. Ecrire les relations de non glissement des roues sur le sol. En déduire les expressions de ω_1 et ω_2 en fonction de v , r_1 , r_2 .

3. On note $\vec{\sigma}_1(O_1)$ et $\vec{\sigma}_2(O_2)$, les moments cinétiques en O_1 et O_2 des roues avant et arrière dans le référentiel \mathcal{R} . Montrer, en utilisant la définition du centre de masse, que leur expression s'écrit en fonction de J_1 , ω_1 , et J_2 , ω_2 comme dans le cas où les points O_1 et O_2 sont fixes, et donner ces expressions.
4. Montrer, en utilisant la définition du centre de masse G , que le moment cinétique total $\vec{\sigma}(G)$ de l'ensemble moto + conducteur relativement au point G dans \mathcal{R} se limite à la somme des deux moments précédents.
5. En appliquant le théorème du moment cinétique dans \mathcal{R} à la roue avant au point O_1 (on admettra qu'il s'écrit comme si O_1 était fixe), établir une relation (3) entre T_1 , J_1 , r_1 , et \dot{v} .
6. En appliquant le théorème du moment cinétique dans \mathcal{R} au système moto + conducteur en G (on admettra qu'il s'écrit comme si G était fixe), donner une expression (4) liant N_1 , N_2 , T_1 , T_2 et h , d_1 , d_2 , J_1 , r_1 , J_2 , r_2 , \dot{v} .
7. À partir des relations obtenues, exprimer les forces de contact N_1 , N_2 , T_1 , et T_2 en fonction de \dot{v} et des paramètres du problème.
8. Pour une accélération telle que $\frac{\dot{v}}{g} = 0,1$, montrer que les roues ne décollent pas du sol.
9. De même, pour cette même accélération montrer qu'il n'y a pas glissement sur le sol.
10. Avec la méthode de votre choix, établir une relation (5) permettant de calculer le moment résultant du couple Γ . Faire l'application numérique pour $\frac{\dot{v}}{g} = 0,1$.

1.2. Roue arrière

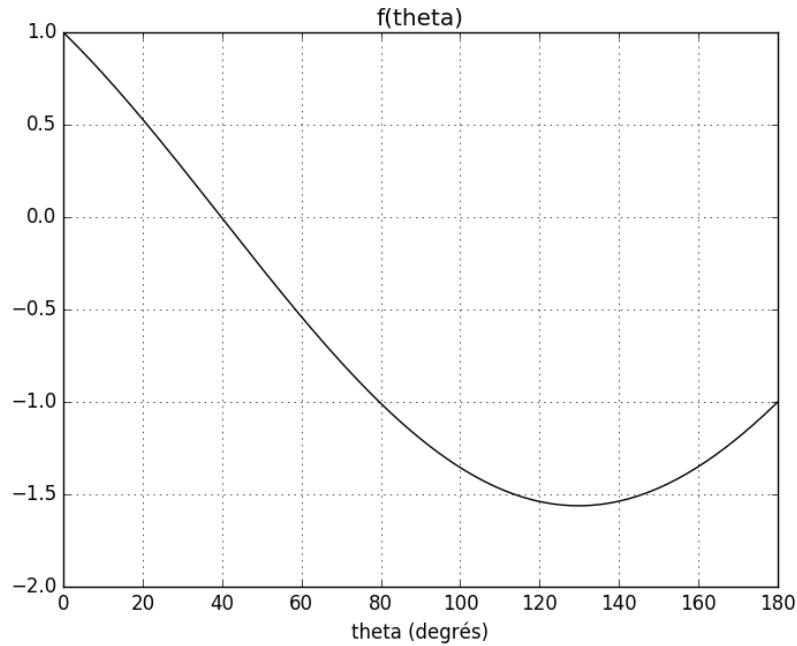
Pour les questions 11. à 13., on suppose que le pilote parvient à soulever du sol la roue avant de son véhicule et on notera θ l'angle d'inclinaison de $\overrightarrow{O_1O_2}$ par rapport à l'horizontale (voir figure ci-contre), supposé constant pendant la phase étudiée.

Pour les calculs, on pourra utiliser la base (\vec{e}_x', \vec{e}_y') qui est liée à la moto et donc obtenue par une rotation d'un angle θ de la base (\vec{e}_x, \vec{e}_y) .



11. En supposant négligeable la vitesse de rotation de la roue avant, exprimer le moment cinétique $\vec{\sigma}(O_2)$ en O_2 de l'ensemble moto + conducteur dans \mathcal{R} .
12. Exprimer la somme des moments $\vec{M}(O_2)$ en O_2 appliqués à ce système global.
13. D'après les deux questions précédentes, donner une équation permettant le calcul de l'angle θ . Donner la valeur numérique de cet angle, pour $\frac{\dot{v}}{g} = 0,2$ en utilisant le graphe de la figure ci-dessous, qui représente la fonction

$$f(\theta) = \cos \theta - \frac{h - r_2}{d_2} \sin \theta.$$



I.3. Frottement fluide

On s'intéresse maintenant à une phase où la moto roule de nouveau sur ses deux roues, sur route horizontale. La vitesse étant plus importante, il est maintenant nécessaire d'introduire une force de frottement fluide $\vec{F} = -kv^2\vec{e}_x$.

14. À l'aide du théorème de l'énergie mécanique, établir l'équation différentielle vérifiée par v .
15. Montrer qu'il existe une valeur limite de la vitesse v_ℓ dont on donnera l'expression en fonction de Γ et des autres paramètres.
16. Montrer que l'équation différentielle peut s'écrire sous la forme $\dot{v} + av^2 = av_\ell^2$. On précisera l'expression de la constante a en fonction de k , M , J_1 , J_2 , r_1 et r_2 .
17. En supposant que la vitesse est nulle à l'instant $t = 0$, établir la solution de l'équation différentielle précédente. Pour cela on pourra introduire le changement de fonction suivant : $u = \frac{v_\ell}{v_\ell - v}$.

II. Jean Perrin et la mesure de la constante d'Avogadro

Comme dans le modèle de l'atmosphère isotherme, le mouvement brownien (agitation thermique) conduit à une répartition exponentielle des molécules, en fonction de l'altitude. Jean PERRIN (prix NOBEL de physique en 1926 pour ses travaux sur le caractère discontinu de la matière et plus spécialement pour sa découverte de l'équilibre de sédimentation) a vérifié cette répartition des molécules à l'échelle mésoscopique. Il en a déduit une mesure de la constante d'AVOGADRO.

On se place dans le référentiel terrestre considéré galiléen. On note \vec{g} le champ de pesanteur uniforme et (Oz) l'axe vertical ascendant.

Les deux parties du problème sont indépendantes.

II.1. Équilibre statistique d'un gaz parfait isotherme

1. Établir l'équation de l'équilibre d'un fluide dans le champ de pesanteur uniforme \vec{g} . On notera p la pression du fluide et ρ sa masse volumique. On raisonnera en considérant que le problème ne dépend que de z .
2. Le fluide considéré dans cette partie est un gaz parfait à la température constante T_0 . Exprimer alors ρ en fonction de la pression p , de la masse molaire M du gaz, de la constante des gaz parfaits R et de T_0 . Réexprimer ρ en fonction de p , de la masse m d'une molécule de gaz, de la constante de BOLTZMANN k_B et de T_0 .
3. Résoudre alors l'équation de l'équilibre du gaz : donner l'évolution de p avec z .
4. En déduire l'évolution de la densité volumique moléculaire n^* du gaz avec z .

II.2. Expérience de Jean Perrin

Pour déterminer la constante d'AVOGADRO, Jean PERRIN a travaillé avec une cuve de $100\ \mu\text{m}$ de hauteur dans laquelle il a placé une suspension de petites sphères de gomme-gutte (résine de plante) de rayon $r = 0,212\ \mu\text{m}$ et de masse volumique $\rho = 1,1942\ \text{g.cm}^{-3}$ dans de l'eau de masse volumique $\rho_0 = 1,003\ \text{g.cm}^{-3}$. L'ensemble est maintenu à la température $T_0 = 293\ \text{K}$.

Jean PERRIN appliqua la loi statistique de distribution de BOLTZMANN aux sphères de gomme-gutte :

$$n^* = n_0^* \exp\left(-\frac{E_p}{k_B T_0}\right)$$

avec n^* la densité moléculaire des sphères et E_p l'énergie potentielle associée à l'ensemble des forces conservatives auxquelles est soumise une sphère de gomme-gutte.

5. On considère une sphère de gomme-gutte à l'altitude z , intégralement plongée dans l'eau. Donner les forces s'exerçant sur cette sphère.

Montrer que ce système est conservatif et exprimer l'énergie potentielle totale E_p pour cette sphère, en fonction de ρ , ρ_0 , r , g et z . On prendra l'origine de l'énergie potentielle totale à l'altitude $z = 0$.

Jean PERRIN a comptabilisé les sphères de gomme-gutte à des quatre altitudes différentes dans la cuve. Les concentrations n^*/n_0^* mesurées pour ces différentes altitudes étaient les suivantes :

z (μm)	5	35	65	95
n^*/n_0^* proportionnelle à	100	47	22,6	12

6. Proposer une méthode pour vérifier si ces valeurs sont cohérentes avec le modèle proposé par Jean PERRIN de répartition des sphères de gomme-gutte selon le facteur de BOLTZMANN. Conclure.
7. Déduire de ces mesures la valeur de la constante d'AVOGADRO obtenue par cette expérience, sachant que $R = 8,314\ \text{J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$. Commenter.

III. Montée de sève

L'objet de ce problème est l'analyse de divers mécanismes physiques susceptibles d'expliquer la montée de la sève brute dans les arbres. La sève brute est le grand courant ascendant qui conduit l'eau et les sels minéraux aux feuilles, bourgeons et fleurs. Dans un premier temps, on étudie différentes¹ causes possibles de l'ascension de la sève : pression hydrostatique et capillarité. Cependant, une évaluation des ordres de grandeur montre qu'aucun de ces mécanismes ne peut rendre compte d'une ascension très élevée, comme dans le cas du pin Douglas où elle atteint 60 mètres. Le mécanisme principal est en fait la transpiration dont la description et le lien avec la thermodynamique de l'eau liquide font l'objet de la suite du problème. On ne s'étonnera pas, le cas échéant si cela est pertinent, de trouver une pression négative, ce qui est possible dans un liquide grâce aux interactions de Van der Waals attractives. On parle alors de *traction*.

Toutes les sous-parties sont très largement indépendantes les unes des autres. Dans tout le problème, on admettra que la sève brute est une solution si diluée que ses propriétés physiques (masse volumique, tension superficielle, équation d'état...) sont celles de l'eau pure. Sauf cas contraire, la température T sera prise à égale 20°C. La signification de certaines données ci-dessous est explicitée dans le texte.

Données numériques

Accélération de la pesanteur	$g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8,3145 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$
Pression atmosphérique normale	$1,01325 \text{ bar} = 0,101325 \text{ MPa} \approx 760 \text{ mmHg}$
Masse volumique de l'eau à 20°C	$\rho = 0,99821 \text{ g.cm}^{-3}$
Tension superficielle de l'eau à 20°C	$\sigma = 72,75 \times 10^{-3} \text{ N.m}^{-1}$
Viscosité dynamique de l'eau à 20°C	$\eta = 1,002 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$
Rayon des canaux de xylème (bois)	$R \approx 25 \mu\text{m}$ (conifères) à $200 \mu\text{m}$ (chêne)
Température de fusion de la glace sous pression normale	$T_F = 273,15 \text{ K}$

Propriétés de l'eau au point critique

Masse volumique	Pression	Température
$\rho_C = 0,322 \text{ g.cm}^{-3}$	$p_C = 22,064 \text{ MPa}$	$T_C = 373,99^\circ\text{C}$

Masses molaires

Élément	C	Cl	H	O	K	Na	S
Masse molaire en g	12	35,5	1,0	16	39,1	23	32,1

III.1. Poussée atmosphérique

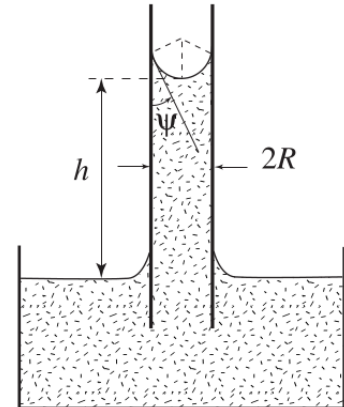
1. En supposant que l'eau est incompressible, quelle est la pression $p(h)$ au sommet d'une colonne d'eau de hauteur h et dont la base est à la pression atmosphérique p_0 ?
2. Quelle hauteur maximale h_A peut atteindre l'eau soumise à une aspiration sous vide ? Application numérique.

1. Voir le sujet original pour l'osmose, non traitable en SUP.

III.2. La capillarité

A l'interface entre une phase liquide et une phase gazeuse, il existe des *forces de tension superficielles* dont l'effet est de réduire, si possible, la surface de contact entre les deux phases. Pour un récipient de taille raisonnablement grande (disons supérieure à 1 cm), l'effet est mineur et peut être négligé. L'interface est alors plane et il y a continuité de la pression à l'interface. Par contre pour un récipient de taille millimétrique ou inférieure, on ne peut plus négliger la courbure de l'interface, qui présente alors un ménisque. Les forces de tension superficielle tendent alors à réduire la surface de contact, ce qui conduit **du côté concave à une surpression par rapport au côté convexe. Il n'y a alors plus continuité de la pression à l'interface.** Pour une interface sphérique de rayon r , cette discontinuité vaut $\frac{2\sigma}{r}$, où σ est la *constante de tension superficielle*.

Par conséquent, lorsque l'on plonge un tube de verre très propre, cylindrique et de faible rayon R , dans un liquide, on constate que le liquide s'élève dans le tube d'une hauteur h . Le ménisque a la forme d'une calotte sphérique qui se raccorde aux parois avec un angle Ψ (voir figure ci-contre).



3. En calculant la pression du liquide juste sous le ménisque de deux façons différentes, relier h à R , $\cos \psi$ et à la grandeur $\lambda_C = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}$, dont on donnera la dimension et que l'on interprétera.
4. Que se passe-t-il si $\psi > \frac{\pi}{2}$?
5. Calculer λ_C pour l'eau. De quelle hauteur h_C la sève brute peut-elle s'élever par capillarité dans les canaux de xylème qui la transportent ?

III.3. La perte de charge

L'eau est un fluide visqueux et son écoulement dans un conduit s'accompagne nécessairement d'une chute de pression, qu'on appelle aussi *perte de charge*. Pour un écoulement stationnaire dans un conduit cylindrique vertical, de longueur h et de section circulaire de rayon R , la perte de charge Δp qui se produit en sus de la variation hydrostatique étudiée à la question 1., est reliée au débit volumique Q par la *loi de Poiseuille* :

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta} \cdot \frac{\Delta p}{h}$$

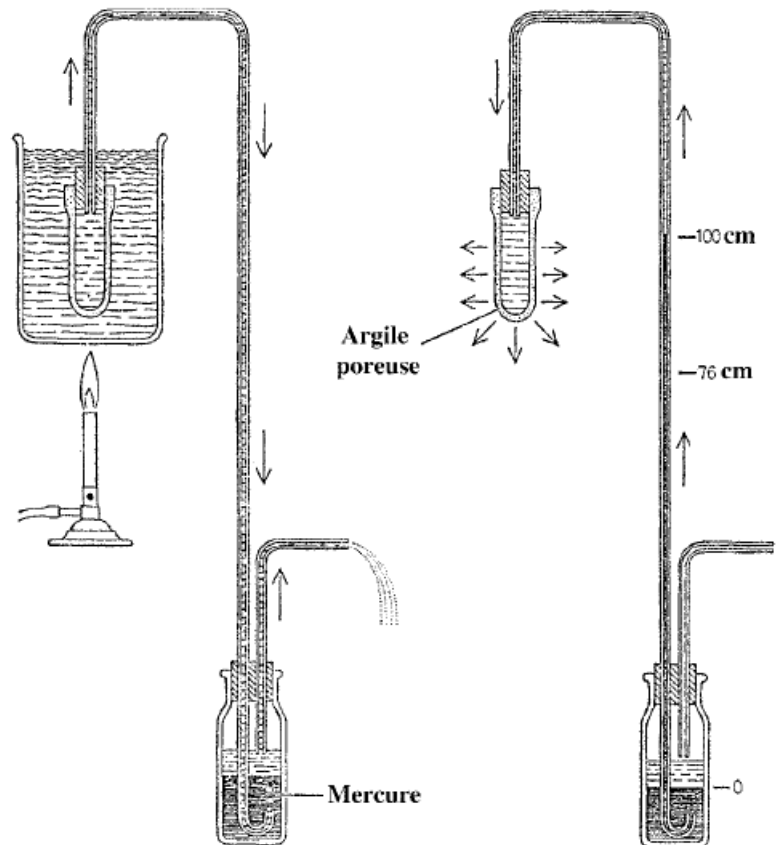
Des mesures donnent des vitesses moyennes d'ascension v_a de l'ordre de $0,5 \text{ m}\cdot\text{h}^{-1}$ pour les conifères et jusqu'à $50 \text{ m}\cdot\text{h}^{-1}$ pour des arbres à gros canaux comme le chêne.

6. En raisonnant sur un tube de rayon R entre deux instant t et $t + dt$, exprimer le débit volumique Q en fonction de v_a et R .
7. En déduire la perte de charge théorique par unité de longueur pour ces deux types d'arbres. Que constate-t-on ? Est-elle significative ?
8. Les mesures expérimentales de perte de charge sont dans un facteur d'environ 2 par rapport aux prévisions théoriques. Donner une explication simple.

III.4. La transpiration

En fait, l'essentiel de la sève s'évapore dans l'atmosphère au niveau des feuilles. Par ailleurs, on sait par traçage radioactif qu'il y a continuité de la colonne d'eau depuis les racines jusqu'aux feuilles.

Un analogue saisissant de ce mode de transport de la sève est donné par l'expérience de J. Böhm (1893). Un récipient, en argile poreuse, est plongé dans un bain d'eau bouillante. L'eau du récipient est siphonnée, par l'intermédiaire d'un tube capillaire, au travers d'une bouteille contenant du mercure. Lorsque l'on retire le bain bouillant, on constate que l'eau reflue dans le tube en tirant à elle une colonne de mercure qui peut atteindre 1 m de hauteur (voir figure ci-contre).



9. En supposant la loi de l'hydrostatique vérifiée, exprimer la pression dans le tube au niveau de l'interface eau/mercure, lorsqu'elle est située à une hauteur $h = 1$ m. En quoi est-ce remarquable ?

L'expérience de Böhm montre ainsi que l'eau liquide peut être **stable sous traction**, grâce aux forces de Van der Waals. Un raisonnement énergétique conduit à une pression limite de rupture de -145 bar. Cet état n'étant pas réellement un état d'équilibre, on parle d'**état métastable**².

10. L'argile poreuse est un entrelacs de pores de tailles et de formes variées dans lesquels existent des ménisques entre l'air et l'eau liquide. En se référant à la section 2, établir quelle doit-être la largeur approximative de ces pores pour provoquer une telle dépression.

On considère un fluide de volume molaire v (volume par unité de mole), à la pression p et à la température T , dont l'équation d'état est correctement décrite par l'équation de Van der Waals dans un certain domaine de température et de pression :

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right) (v - b) = RT$$

où a et b sont des constantes. On définit la compressibilité isotherme χ_T par la quantité

$$\chi_T = -\frac{1}{v} \left. \frac{\partial v}{\partial p} \right|_T.$$

11. Calculer χ_T pour le fluide de Van der Waals. On pourra utiliser le fait que

$$\left. \frac{\partial v}{\partial p} \right|_T = \left(\left. \frac{\partial p}{\partial v} \right|_T \right)^{-1}$$

Quel doit-être le signe de χ_T pour que le fluide soit mécaniquement stable ? Pourquoi ?

2. c'est-à-dire un état suffisamment stable pour être observé, mais pas suffisamment pour constituer un état d'équilibre pérenne.

On appelle *spinodale* le lieu des points, dans le plan de coordonnées (v, p) (v en abscisses et p en ordonnées), pour lesquels la compressibilité diverge, c'est-à-dire $\chi_T^{-1} = 0$.

12. Montrer que l'équation de la spinodale du fluide de Van der Waals en coordonnées (v, T) est donnée par :

$$\frac{(v-b)^2}{v^3} = \frac{RT}{2a}.$$

13. En déduire l'équation de la spinodale $p = f(v)$ en coordonnées (v, p) .
14. Tracer l'allure de la spinodale dans le diagramme (v, p) en indiquant les zones où le fluide n'est pas stable mécaniquement.
15. Calculer les coordonnées (v_C, p_C) du sommet C de la spinodale, appelé *point critique*, puis la température correspondante T_C .
16. Tracer, dans le plan (v, p) , l'allure des isothermes du fluide de Van der Waals. Justifier en raisonnant sur le signe de la pente.
17. Expliquer pourquoi, pour une température T donnée inférieure à T_C , le gaz de Van der Waals ne peut être observé en l'état pour des valeurs de v intermédiaires. Indiquer sur le graphe de cette isotherme de Van der Waals (reproduit sur votre copie) les parties correspondant au fluide stable ou instable.

En pratique le système trouve alors sa stabilité grâce à une transition liquide-gaz qui donne lieu à la coexistence entre du liquide et du gaz. Au-delà du point critique par contre, donc pour $T > T_C$, il n'y a plus de distinction entre liquide et gaz, on parle de fluide super-critique.

* * * FIN DE L'ÉPREUVE * * *