# MÉCANIQUE

## I. Bifurcation mécanique

**1. a)** Le système $M$ de masse $m$ est soumis à son poids et à la réaction normale du support en l'absence de frottements. Ces deux forces ne travaillent pas. Il est soumis aussi aux deux forces de tension des ressorts, qui sont conservatives, d'énergie potentielle totale

$$E_p = 2 * \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 \quad \text{avec} \quad \ell = \sqrt{a^2 + x^2}\,.$$

Donc le système est conservatif et son énergie mécanique est conservée :

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + k(\sqrt{a^2 + x^2} - \ell_0)^2 = \text{constante}}$$

**b)** On dérive par rapport au temps cette équation, et on simplifie par $\dot{x}$ car on cherche une solution continue qui ne soit pas identiquement nulle. On obtient l'équation du mouvement :

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{2k}{m}x\left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right) = 0}$$

**2.** Une position d'équilibre correspond à $\ddot{x} = 0$ donc à

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = 2k\,x\left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right) = 0 \tag{1}$$

On obtient les solutions

$$\boxed{x_0 = 0 \quad \text{et} \quad x = \pm x_1 \quad \text{avec} \quad x_1 = \sqrt{\ell_0^2 - a^2}}$$

les deux dernières n'existant que si $a < \ell_0$, donc si le ressort est comprimé au voisinage de $x = 0$.
On calcule la dérivée seconde de $Ep$ en ces points d'équilibre pour savoir si ce sont des minima, c'est-à-dire s'ils sont stables. On obtient

$$\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2} = 2k\left(1 - \frac{\ell_0 a^2}{\ell^3}\right) \quad \text{donc}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_0) = 2k\left(1 - \frac{\ell_0}{a}\right) > 0 \Leftrightarrow a > \ell_0 \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}(\pm x_1) = 2k\left(1 - \frac{a^2}{\ell_0^2}\right) > 0$$

Donc la position $x_0$ est stable si $a > \ell_0$, instable sinon. Les positions $\pm x_1$ sont stables lorsqu'elles existent.

**3. a)** Développée au voisinage d'une position d'équilibre $x_e$ au plus petit ordre non nul, l'équation de l'énergie s'écrit :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_p(x_e) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_e)\,(x - x_e)^2 = \text{constante}$$

En effet, la dérivée seconde est non nulle tant que $\ell_0 \neq a$. Il s'agit de l'énergie d'un oscillateur harmonique, de pulsation propre

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_e)} \quad \text{, ce qui donne}$$

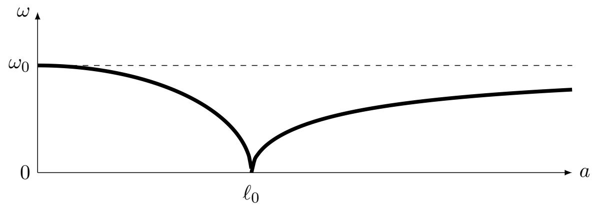
$$\boxed{\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{a^2}{\ell_0^2}}} \quad \text{pour} \quad a < \ell_0 \quad \text{autour de} \quad x_e = \pm x_1\,,$$

$$\boxed{\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{\ell_0}{a}}} \quad \text{pour} \quad a > \ell_0 \quad \text{autour de} \quad x_e = x_0 = 0\,,$$

où l'on a posé $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}}$.





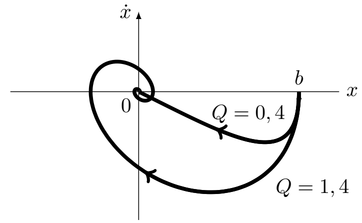



**b)** Au passage par la valeur critique $a = \ell_0$, le système passe d'un état d'équilibre stable central à deux équilibres excentrés. Il doit donc choisir entre l'un des deux états (droit ou gauche) autour duquel osciller, d'où le mot bifurcation. Ce passage se fait en passant par un période infinie, tout du moins dans l'approximation harmonique, donc des oscillations de plus en plus lentes.

**4. a)** Le système évolue au voisinage de la position $x_0 = 0$, à la pulsation $\omega \approx \omega_0$ car $a \gg \ell_0$, mais ses oscillations sont amorties. L'équation du mouvement est donc

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{h}{m}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

**b)** L'allure du portrait de phase dépend de la valeur du facteur de qualité, $Q = \frac{m\omega_0}{h} = \frac{\sqrt{2km}}{h}$. Dans le premier cas, $Q = 1,4$ donc le mouvement est pseudo-périodique : la masse tend vers $x = 0$ en oscillant, le portrait fait une spirale. Dans le second cas, $Q = 0,4$ donc le mouvement est apériodique : le portrait tend directement vers $x = 0$ sans tourner autour (la vitesse ne change pas de signe).



## II. Lancement d'un satellite

**1. a)** Pour une orbite circulaire de rayon $R$, le PFD appliqué dans $\mathcal{R}_G$ au satellite s'écrit $-m\frac{v^2}{R}\overrightarrow{e_r} = -\frac{\mathcal{G}mM}{R^2}\overrightarrow{e_r}$, ce qui mène à $\boxed{v_0 = \sqrt{\dfrac{\mathcal{G}M}{R}} = \sqrt{g_0 R}}$.

**b)** La période d'un mouvement circulaire uniforme vérifie $T_0 = \frac{2\pi R}{v_0}$ d'où $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g_0}}}$.

**c)** Le mouvement de la Terre étant uniforme de période $T$, la vitesse d'un point de l'équateur est $v_E = \frac{2\pi R}{T}$, d'où $\boxed{q = \dfrac{4\pi^2 R}{g_0 T^2}} \approx \underline{3,5\,10^{-3}} \ll 1$.

**2. a)** $g(z) = \frac{\mathcal{G}M}{(R+z)^2} = \boxed{g_0 \dfrac{R^2}{(R+z)^2}}$.

**b)** La période de révolution du satellite doit être celle de la rotation propre de la Terre, pour qu'il soit géostationnaire. On réutilise le résultat de la question **1.b)** pour cette nouvelle orbite, de rayon $R+z = R_1$ et de période $T$ : $T = 2\pi\sqrt{\frac{R+z}{g(z)}} = 2\pi\sqrt{\frac{R_1^3}{g_0 R^2}}$, ce qui mène à $\boxed{R_1 = \left(g_0 \dfrac{R^2 T^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}}$.

On en déduit $\boxed{x = \dfrac{R_1}{R} = \left(\dfrac{g_0 T^2}{4\pi^2 R}\right)^{\frac{1}{3}}} \approx \underline{6,6}$. Ce résultat aurait pu être retrouvé via la loi de Kepler.

**c)** Cette fois on se sert de la question **1.a)** pour l'orbite $C_1$, ce qui donne $v_1 = \sqrt{g(z)\,(R+z)} = \sqrt{g_0 \frac{R^2}{(R+z)}} = \sqrt{g_0 R \frac{R}{R_1}}$ d'où $\boxed{v_1 = \dfrac{v_0}{\sqrt{x}}}$.

**d)** Le travail $W$ que doivent produire les propulseurs est donné par le théorème de l'énergie mécanique appliqué dans $\mathcal{R}_G$, et correspond au travail des forces non conservatives. L'état final correspond à l'énergie mécanique sur l'orbite $C_1$, soit $E_{m\,1} = -\frac{k}{2R_1}$ en posant $k = \mathcal{G}Mm$. L'état initial correspond à l'énergie mécanique du satellite au repos sur la surface terrestre, donc en mouvement de rotation à une vitesse inférieure à $v_E$. Or on a $v_1 = \frac{v_0}{\sqrt{x}} \approx 0,4\,v_0$, et $v_0 \gg v_E$, donc $v_1 \gg v_E$ et on peut négliger l'énergie cinétique dans l'état initial devant celle de l'état final :

$$W = E_{m\,1} - E_{m\,\text{surface}} \approx E_{m1} - E_{p\,0} = -\frac{k}{2R_1} + \frac{k}{R} = \frac{k}{R}\left(1 - \frac{R}{2R_1}\right) = \frac{\mathcal{G}Mm}{R}\left(1 - \frac{1}{2x}\right)$$

D'autre part on a $K_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{\mathcal{G}Mm}{2R}$ d'après **1.a)**, d'où : $\boxed{W = K_0\left(2 - \dfrac{1}{x}\right)}$

**3. a)** Pour la phase 1, il n'y a pas de variation d'énergie potentielle, et de nouveau on néglige la vitesse initiale due à la rotation terrestre. Donc

$$W_1 = E_{m\,0} - E_{m\,\text{surface}} \approx E_{m\,0} - E_{p\,0} = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad \text{d'où} \quad \boxed{W_1 = K_0}.$$

**b)** Sur l'orbite elliptique, l'énergie mécanique vérifie au point $P$ : $E_{m\,0,1} = \frac{1}{2}mv_0'^2 - \frac{k}{R}$. Par ailleurs cette ellipse est de grand-axe $R + R_1$, donc on peut aussi écrire $E_{m\,0,1} = -\frac{k}{(R+R_1)}$. Ces deux relations mènent à

$$\frac{1}{2}mv_0'^2 = \frac{k}{R}\left(1 - \frac{R}{R+R_1}\right) = \frac{k}{R}\left(1 - \frac{1}{1+x}\right) = \frac{k}{R}\,\frac{x}{1+x}$$

Or $mv_0^2 = \frac{k}{R}$, ce qui donne $\boxed{v_0' = v_0\sqrt{\dfrac{2x}{1+x}}}$.





**c)** De nouveau le théorème de l'énergie mécanique nous donne le travail à produire par les propulseurs pour la phase 2 :

$$W_2 = E_{m\,0,1} - E_{m\,0} = -\frac{k}{R+R_1} + \frac{k}{2R} = \frac{k}{2R}\left(1 - \frac{2}{1+x}\right) \quad \text{d'où} \quad \boxed{W_2 = K_0\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}.$$

**d)** Les vitesses au périgée $P$ et à l'apogée $A$ sont orthoradiales, et donc reliées par la constante des aires : $C = Rv_0' = R_1 v_1'$, et donc $v_1' = v_0'/x$. D'après la question **3.b)** on obtient $\boxed{v_1' = v_0\sqrt{\dfrac{2}{x(1+x)}}}$.

**e)** Pour la phase 3, on obtient

$$W_3 = E_{m\,1} - E_{m\,0,1} = -\frac{k}{2R_1} + \frac{k}{R+R_1} = \frac{k}{2R}\left(\frac{2}{1+x} - \frac{1}{x}\right) \quad \text{d'où} \quad \boxed{W_3 = K_0\,\frac{x-1}{x(x+1)}}.$$

En faisant la somme des travaux des propulseurs pour les 3 étapes, on obtient

$$W_1 + W_2 + W_3 = K_0\left(1 + \frac{x-1}{x+1} + \frac{x-1}{x(x+1)}\right) = ... = K_0\left(2 - \frac{1}{x}\right) \quad \text{d'où} \quad \boxed{W_1 + W_2 + W_3 = W},$$

ce qui est normal car la variation totale d'énergie mécanique est la même que l'on envoie le satellite directement sur $C_1$ depuis la surface, ou qu'on le fasse en trois étapes.

**f)** La période de révolution sur l'ellipse est $2\Delta t$, et le demi-grand-axe est $\frac{1}{2}(R + R_1)$. En utilisant aussi l'orbite $C_1$ on obtient

$$\frac{2^3(2\Delta t)^2}{(R+R_1)^3} = \frac{T^2}{R_1^3} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\Delta t = \frac{T}{2^{5/2}}\left(\frac{1}{x} + 1\right)^{\frac{3}{2}}} = \underline{5\,\text{h}\,14\,\text{min}}$$

**4. a)** La densité de l'atmosphère diminuant avec l'altitude, le coefficient de frottement atmosphérique diminue également, ce qui se traduit par une dépendance en $\frac{1}{z}$ de la force.

**b)** La force de frottement étant faible devant la force de gravitation, les calculs précédents sont valables sur une révolution. On peut donc réutiliser les résultats intermédiaires obtenus en **2.b)** et **2.c)** respectivement :

$$T_S(z) = 2\pi\sqrt{\frac{R+z}{g(z)}} = \boxed{2\pi\sqrt{\frac{(R+z)^3}{g_0 R^2}}} \quad \text{et} \quad v(z) = \sqrt{g(z)\,(R+z)} = \boxed{\sqrt{g_0\frac{R^2}{(R+z)}}}$$

**c)** Pour de petites variations, on peut différencier les relations précédentes :

$$\Delta v \approx \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}\,\Delta z = -\frac{1}{2}\sqrt{g_0\frac{R^2}{(R+z)^3}}\,\Delta z \quad \text{d'où} \quad \boxed{\Delta v = -\frac{\pi}{T_S}\,\Delta z}.$$

Ainsi, la vitesse croît si le satellite se rapproche de la Terre, et vice versa.

**d)** Le théorème scalaire du moment cinétique selon l'axe $Oz$ orthogonal au plan du mouvement s'écrit : $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = -\frac{\lambda m}{z}\,v^2\,(R+z)$. En remplaçant par l'expression de $v(z)$ (**4.b)**), on obtient $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = -\frac{\lambda m}{z}\,g_0 R^2$. Le moment cinétique décroît au cours du temps, d'autant plus vite qu'il est proche de la Terre car les frottements augmentent. En intégrant sur une période de révolution on obtient donc $\boxed{\Delta\sigma = -\dfrac{\lambda m}{z}\,g_0 R^2\,T_S}$.

**e)** Par ailleurs on calcule $\sigma(z) = mv(z)\,(R+z) = mR\,\sqrt{g_0(R+z)}$. En différenciant, on obtient

$$\boxed{\Delta\sigma = \frac{mR\sqrt{g_0}}{2\sqrt{R+z}}\,\Delta z}.$$

Comme $\Delta\sigma < 0$, on a $\Delta z < 0$. Le satellite se rapproche donc de la Terre à cause des frottements.