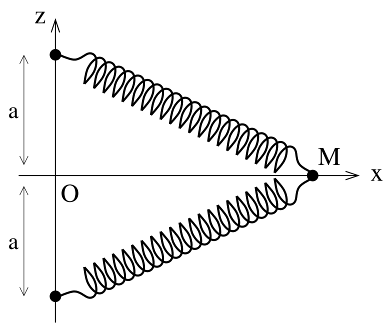
MÉCANIQUE

CALCULATRICES AUTORISÉES

I. Bifurcation mécanique

Un point matériel M de masse m se déplace sans frottement sur l'axe horizontal (Ox) sous l'action de deux ressorts identiques, de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. Ces deux ressorts sont fixés en deux points, disposés symétriquement sur l'axe vertical (Oz) de part et d'autre de O, à la distance a de ce point.



1. a) Etablir, en la justifiant, une équation différentielle du premier ordre vérifiée par $x(t)$.

b) En déduire l'équation du mouvement, d'ordre 2, vérifiée par $x(t)$.

2. Déterminer les positions d'équilibre et étudier leur stabilité, en fonction des valeurs des paramètres. On supposera que $\ell_0 \neq a$.

3. a) Déterminer la pulsation des petites oscillations autour de la/des position(s) d'équilibre stable. On posera

$$\omega_0 = \lim_{a \to 0} \omega$$

Exprimer ω_0 en fonction des données du problème.

b) Tracer la courbe donnant ω en fonction de a. Que se passe-t-il au voisinage de $a = \ell_0$. Justifier le terme de bifurcation.

4. Pour cette question uniquement, on prend en compte l'existence d'une force de frottement fluide s'exerçant sur la masse, modélisée par $F = -h\dot{x}$. Et on se place dans le cas où $a \gg \ell_0$.

a) Ecrire l'équation du mouvement au voisinage de l'équilibre stable.

b) La masse est lâchée sans vitesse initiale en $x = b > 0$. On suppose les valeurs numériques suivantes : $k = 1\,\text{N.m}^{-1}$, $h = 1\,\text{N.m}^{-1}\text{.s}$. Dessiner qualitativement le portrait de phase lorsque $m = 1\,\text{kg}$, puis lorsque $m = 0,1\,\text{kg}$. Justifier.

II. Lancement d'un satellite

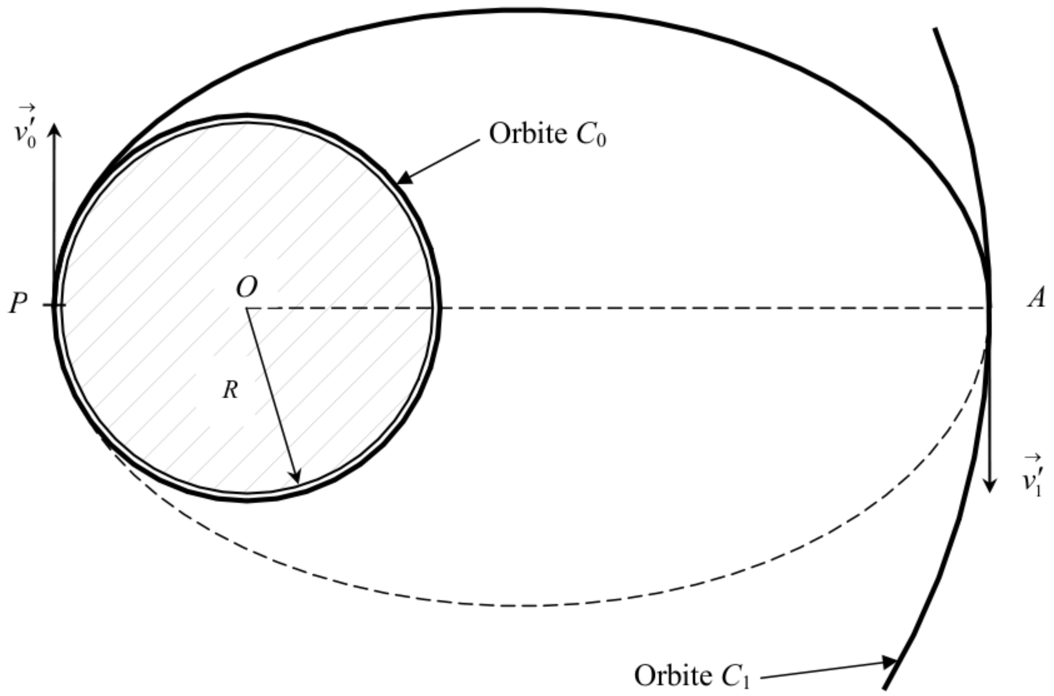
La Terre est considérée comme un astre sphérique de centre O, de rayon R et de masse M. Le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_G$ est supposé galiléen. La Terre est animée par rapport à ce référentiel d'un mouvement de rotation uniforme de période T. On désigne par g_0 l'intensité du champ de gravitation terrestre à la surface de la Terre.

1. On place un satellite S de masse m considéré ponctuel sur une orbite circulaire C_0 située dans le plan équatorial et d'altitude z faible devant R (cf figure ci-dessous). On considère que sur l'orbite C_0 le satellite est soumis au champ de pesanteur $\vec{g}_0$ identique à celui qui règne au niveau du sol.

a) Déterminer la vitesse v_0 du satellite S en fonction de g_0 et R.

b) En déduire la période T_0 du satellite en fonction de g_0 et R.

c) Déterminer la vitesse v_E d'un point de l'équateur terrestre en fonction de R et T, puis exprimer le rapport $q = \frac{v_E^2}{v_0^2}$. Calculer q pour $R = 6400\,\text{km}$, $g_0 = 9,81\,\text{m.s}^{-2}$ et $T = 24\,h$.



Dans la suite du problème, on négligera v_E devant v_0.

2. On place maintenant le satellite S sur une nouvelle orbite C_1 située dans le plan équatorial. On désire que S soit vu immobile de tout point de la surface terrestre, on parle alors de satellite géostationnaire. On ne considère plus que z est très petit devant R.

- **a)** Exprimer le champ gravitationnel g en fonction de g_0 et z notamment.
- **b)** Déterminer le rayon R_1 de cette nouvelle orbite C_1. En déduire l'expression du rapport $x = \frac{R_1}{R}$, puis sa valeur numérique.
- **c)** Déterminer la vitesse v_1 du satellite sur l'orbite C_1 en fonction de x et v_0.
- **d)** Exprimer en fonction de $K_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$ et de x, le travail W que doivent fournir les propulseurs pour amener le satellite sur l'orbite C_1 depuis la surface terrestre.

3. La mise en orbite géostationnaire du satellite S est réalisée de la manière suivante :

— Phase 1 : On lance le satellite depuis la surface terrestre sur l'orbite C_0. On désigne par W_1 le travail nécessaire à cette opération.

— Phase 2 : En un point P de C_0, on communique au satellite en un temps très bref une nouvelle vitesse v_0' de manière à le placer sur une orbite elliptique tangente à C_1 au point A. On désigne par v_1' la vitesse du satellite à son arrivée au point A.

— Phase 3 : Au point A, on fait passer la vitesse du satellite de v_1' à v_1.

- **a)** Exprimer le travail des propulseurs W_1 nécessaire à la phase 1 en fonction de K_0.
- **b)** Calculer la vitesse v_0' en fonction de v_0 et de x.
- **c)** Exprimer le travail des propulseurs W_2 nécessaire à la phase 2 en fonction de K_0 et de x.
- **d)** Déterminer la vitesse v_1' en fonction de v_0 et de x.
- **e)** Exprimer le travail des propulseurs W_3 nécessaire à la phase 3 en fonction de K_0 et de x. Comparer le travail W calculé à la question **2.d)** et la somme $W_1 + W_2 + W_3$. Commenter.
- **f)** Déduire de la 3$^{\text{eme}}$ loi de Kepler la durée Δt du transfert du satellite de l'orbite C_0 à l'orbite C_1 en fonction de T et de x. Faire l'application numérique.

4. On s'intéresse maintenant au cas d'un satellite de basse altitude (qui n'est donc plus géostationnaire), dont on souhaite étudier l'évolution sous l'effet de la force de frottement atmosphérique. Le satellite décrit une orbite circulaire de rayon $r = R + z$ et de période T_S. Dans les hautes couches de l'atmosphère, le satellite subit une force de frottement fluide $\overrightarrow{F}$ très inférieure à l'attraction gravitationnelle terrestre, de la forme :

$$\overrightarrow{F} = -\frac{\lambda m}{z}\, v\, \overrightarrow{v}\,,$$

où $\overrightarrow{v}$ est la vitesse instantanée du satellite et v sa norme.

a) Justifier qualitativement la dépendance de $\overrightarrow{F}$ en fonction de z.

b) En vous servant des questions précédentes, exprimer v et T_S en fonction de z et des constantes nécessaires.

c) A cause des frottements, au cours d'une révolution la vitesse varie légèrement de Δv ainsi que l'altitude de Δz. Ces variations peuvent être considérées petites devant v et z respectivement. Etablir une relation entre Δv et Δz, qu'on exprimera en fonction de T_S. Comment évolue la vitesse si le satellite se rapproche légèrement de la Terre ?

d) Montrer que le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma} = \sigma\,\vec{u}_z$ du satellite pris au centre de la Terre n'est pas conservé. Calculer sa variation $\Delta\sigma$ au cours d'une révolution en fonction de T_S et λ notamment.

e) Calculer maintenant σ en fonction de z et en déduire la relation entre $\Delta\sigma$ et Δz. En déduire si le satellite se rapproche de la Terre ou s'éloigne.

* * * Fin de l'épreuve * * *