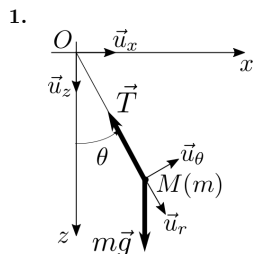


MÉCANIQUE

I. Collisions de deux pendules

I.1. Pendule seul



On écrit le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) dans le référentiel terrestre du laboratoire \mathcal{R} , considéré galiléen, pour le point matériel M soumis à son poids et à la tension du fil $\vec{T} = -T\vec{u}_r$ (avec T sa norme) :

$$m \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} = -m\ell\dot{\theta}^2 \vec{u}_r + \ell\ddot{\theta} \vec{u}_\theta = m\vec{g} + \vec{T}.$$

En projection selon \vec{u}_θ , cela conduit à l'équation du mouvement

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0.$$

2. En développant au premier ordre non nul le sin on obtient la version linéarisée $(\mathcal{E}) : \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$ avec

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \text{ la pulsation propre et } T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \text{ la période propre.}$$

3. La solution générale s'écrit $\theta(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$, avec A et B deux constantes d'intégration. Les conditions initiales conduisent à $A = \theta_0$ et $B = 0$, d'où $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$.

4. La position d'équilibre est $\theta = 0$ (il y en a deux mais considérons la position stable, car la linéarisation de l'équation différentielle n'est pas valable en $\theta = \pi$). Elle est atteinte à l'instant $t_0 = \frac{T_0}{4}$, de telle sorte que $\cos(\omega_0 \frac{T_0}{4}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$. On a alors une vitesse maximale en norme, qui vaut $\vec{v} = \ell\dot{\theta} \vec{u}_\theta = -\ell\theta_0\omega_0 \sin(\omega_0 \frac{T_0}{4}) \vec{u}_\theta$ donc $\vec{v}(t_0) = -\ell\theta_0\omega_0 \vec{u}_x = -\theta_0\sqrt{g\ell} \vec{u}_x$.

I.2. Système de deux pendules

5. Les résultats précédents sont applicables aux deux pendules, dont les lois horaires sont donc

$$\theta_1(t) = \theta_{10} \cos(\omega_0 t) \text{ et } \theta_2(t) = -\theta_{10} \cos(\omega_0 t).$$

Les pendules se rencontrent à l'instant t_1 tel que $\theta_1(t_1) = \theta_2(t_1) \Leftrightarrow \cos(\omega_0 t_1) = 0$ pour la première fois après l'instant 0. D'où un point de rencontre sur l'axe Oz et à l'instant $t_1 = t_0 = \frac{T_0}{4} = \frac{\pi}{2\omega_0} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{g}{\ell}}$.

6. a) Comme précédemment, on obtient des vitesses symétriques $v_2 = -v_1 = \ell\theta_{10}\omega_0 = \theta_{10}\sqrt{g\ell}$.

b) La conservation de la quantité de mouvement totale s'écrit (après projection selon \vec{u}_x) :

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \Leftrightarrow m_1(v_1 - v'_1) = m_2(v'_2 - v_2). \tag{1}$$

c) Le choc étant élastique, on a $\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2$, ce qui se ré-écrit $m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2)$. Le quotient de cette dernière équation par l'Eq. (1) conduit à

$$v_1 + v'_1 = v_2 + v'_2. \tag{2}$$

d) La combinaison linéaire (2) + $\frac{1}{m_1}(1)$ conduit à

$$v'_2 = \frac{2m_1 v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2} \text{ et } v'_1 = v_2 - v_1 + v'_2 = \frac{2m_2 v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}. \tag{3}$$

En utilisant $v_2 = -v_1 = \theta_{10}\sqrt{g\ell}$ et l'Eq. (1) on trouve finalement

$$v'_2 = \frac{m_2 - 3m_1}{m_1 + m_2} \theta_{10}\sqrt{g\ell} \text{ et } v'_1 = \frac{3m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \theta_{10}\sqrt{g\ell}.$$

REMARQUE : On observe que v'_1 s'obtient de v'_2 par une permutation des indices et une symétrie, et vice versa, ce qui était prévisible physiquement.

En particulier, si $m_2 \gg m_1$ on a

$$v'_2 \xrightarrow{\frac{m_1}{m_2} \rightarrow 0} \theta_{10}\sqrt{g\ell} = -v_1 \text{ et } v'_1 \xrightarrow{\frac{m_1}{m_2} \rightarrow 0} 3\theta_{10}\sqrt{g\ell} = -3v_1.$$

Donc M_2 poursuit alors sa course sans percevoir le choc, alors que M_1 est repoussée dans le même sens à une vitesse 3 fois supérieure en norme.

e) D'après les conditions initiales en t_1^+ , la nouvelle loi horaire s'écrit maintenant $\theta_k(t) = \frac{v'_k}{\ell\omega_0} \sin(\omega_0(t - t_1))$ pour $k = 1, 2$. Comme précédemment, le lien entre amplitude angulaire et vitesse maximale est donc $\theta'_{k0} = \frac{|v'_k|}{\ell\omega_0}$, d'où $\theta'_{10} = \frac{|3m_2 - m_1|}{m_1 + m_2} \theta_{10}$ et $\theta'_{20} = \frac{|m_2 - 3m_1|}{m_1 + m_2} \theta_{10}$.

7. La période étant indépendante de l'amplitude (isochronisme pour les petites amplitudes), les deux pendules se rencontrent après une demi-période, de nouveau en $\theta = 0$.

8. a) Au bout d'une demi-période, la vitesse est l'opposé de ce qu'elle était à l'instant "initial" t_1 . Donc $w_1 = -v'_1$ et $w_2 = -v'_2$.

b) On peut réutiliser les Eqs. (3) en remplaçant v_1 et v_2 par w_1 et w_2 , et v'_1 et v'_2 par w'_1 et w'_2 :

$$w'_2 = \frac{2m_1 w_1 + (m_2 - m_1)w_2}{m_1 + m_2} \text{ et } w'_1 = \frac{2m_2 w_2 + (m_1 - m_2)w_1}{m_1 + m_2}.$$

c) D'où $w'_2 = -\frac{v_2}{(m_1+m_2)^2} (2m_1(3m_2 - m_1) + (m_2 - m_1)(m_2 - 3m_1)) = -v_2 \frac{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2} = -v_2$, et $w'_1 = -\frac{v_2}{(m_1+m_2)^2} (2m_2(m_2 - 3m_1) + (m_1 - m_2)(3m_2 - m_1)) = v_2 \frac{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2} = v_2$.

Finalement $w'_2 = -v_2 = v_1$ et $w'_1 = -v_1 = v_2$.

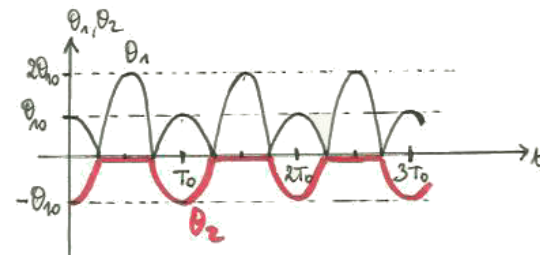
d) On a toujours le lien entre vitesse maximale (en $\theta = 0$) et élongation maximale : $w'_1 = \sqrt{g\ell} \theta''_{10} = -v_1 = \sqrt{g\ell} \theta_{10}$ donc $\theta''_{10} = \theta_{10}$. Par le même raisonnement on a l'élongation extrême (minimale car négative) $\theta''_{20} = \theta_{20} = -\theta_{10}$. Ceci peut toujours s'obtenir par un raisonnement énergétique.

9. Au bout de 2 chocs plus un quart de période, le système se retrouve exactement dans le même état à qu'à l'instant initial $t = 0$. Donc le système suit alors une évolution périodique de période T_0 en alternant les 2 phases décrites précédemment.

10.

On obtient $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 1,0s$.

$\theta'_{10} = 20^\circ$ et $\theta'_{20} = 0^\circ$.
Donc après le premier choc, M_2 reste immobile alors que M_1 admet un mouvement d'amplitude double.



II. Looping dans un parc d'attraction

1. Le chariot est soumis à son poids (force conservative) et à la réaction normale des rails (orthogonale au déplacement, donc qui ne travaille pas). **Le système est donc conservatif.** L'énergie potentielle de pesanteur s'écrit $E_p = mgz$. La conservation de l'énergie mécanique entre les points A et B donne donc :

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv^2(B) + 0 \implies v(B) = \sqrt{2gh} \implies h = \frac{v^2(B)}{2g} = \underline{57\text{m}}$$

2. a) On applique la conservation de l'énergie mécanique entre le point A et un point quelconque du rail circulaire :

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mgR(1 - \cos\theta) \quad \text{avec} \quad v = R\dot{\theta} \quad \text{et} \quad \dot{\theta} > 0, \quad \text{d'où} \quad \dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{R} \left[\cos\theta - 1 + \frac{h}{R} \right]}$$

- b) On applique le Principe Fondamental de la Dynamique (PDF) à $\{M\}$ selon \vec{u}_r , le point M n'étant soumis qu'à son poids $m\vec{g}$ et à la réaction normale du rail \vec{N} :

$$-mR\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - N \iff N = mg\cos\theta + mR\dot{\theta}^2$$

En injectant le résultat précédent, il vient $N = mg \left[3\cos\theta + 2 \left(\frac{h}{R} - 1 \right) \right]$.

- c) N ne doit jamais s'annuler pour que le chariot reste en contact avec le rail :

$$\forall \theta, N > 0 \iff \forall \theta, 3\cos\theta + 2 \left(\frac{h}{R} - 1 \right) > 0 \iff 2 \left(\frac{h}{R} - 1 \right) > -3 \iff \frac{h}{R} > \frac{5}{2}$$

3. **L'énergie cinétique E_c** étant nulle au départ, il s'agit de la **courbe 3**.

L'énergie mécanique E_m ne fait que décroître en raison des frottements, car il n'y a pas de force motrice non conservative (pas de moteur), donc il s'agit de la **courbe 1**.

Comme la réaction normale, l'énergie potentielle oscille au gré des variations d'altitude, mais cette dernière commence nécessairement par décroître. Donc **l'énergie potentielle E_p** est la **courbe 2**.

La normale N est donc la **courbe 4**. Elle est constante au début du mouvement, ce qui est correct car le mouvement est rectiligne dans la première phase.

4. (i) La vitesse est maximale lorsque E_c est maximale. Sur la courbe 3, on lit $E_{c,max} = 5,6\text{MJ}$. D'où

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2E_{c,max}}{m}} = \underline{33\text{m.s}^{-1}} = \underline{120\text{km.h}^{-1}}$$

- (ii) Initialement, $E_p(A) = mgh = 6,3\text{MJ} \implies h = \frac{E_p(A)}{mg} = \underline{64\text{m}}$.

Sans frottement, il fallait une hauteur de 57m pour atteindre 120km.h⁻¹. Dans le cas réel, on voit qu'il faut bien une **hauteur supérieure pour palier les frottements**.

Par ailleurs, le second maximum d'énergie potentielle est à 4MJ pour une hauteur $2R$, de telle sorte que $\frac{h}{R} > \frac{5}{2}$. Les conditions sont donc réunies pour un tour complet s'il n'y a pas de frottements, avec une petite marge de sécurité.

- (iii) Le mobile quitte le rail la première fois que $N = 0$, c'est-à-dire en $t = \underline{32\text{s}}$.

- (iv) On compte le nombre de tours par le nombre de minima de E_p (à zéro) moins un, la première annulation correspondant à l'entrée du chariot dans le rail circulaire. Le chariot aura donc effectué **deux tours complets** avant de décrocher à 2 tours et demi.

5. a) En mouvement circulaire : $a_r = -R\dot{\theta}^2 = -\frac{v^2}{R}$ donc $a_r = -\frac{2E_c}{mR}$.

- b) L'accélération maximale sera obtenue pour $E_{c,max} = 5,6\text{MJ}$. Le rayon R du rail est obtenu grâce au second maximum d'énergie potentielle, qui vaut $E_{p_{max,2}} = 2mgR = \underline{4\text{MJ}}$. Cela correspond à une

accélération radiale maximale $|a_{r,max}| = \frac{4E_{c,max}}{E_{p_{max,2}}} g = \underline{5,7g}$. Cette accélération maximale se produit

lorsque le chariot atteint pour la première fois le point le plus bas du looping, B , à l'entrée dans le rail circulaire. Comme $|a_{r,max}| > 5g$, les passagers **risquent de perdre connaissance** (puis de s'écraser sur le sol au bout de 2 tours de demi...). Il faudra revoir les paramètres de cette attraction avant de la mettre en service!

III. Mouvement de la sonde Pioneer

1. $\vec{F} = -\frac{GM_S m}{z^2} \vec{e}_z$.

2. Sur la trajectoire rectiligne donnée, le travail élémentaire pour un déplacement élémentaire s'écrit $\delta W = \vec{F}_g \cdot dz \vec{e}_z = -\frac{GM_S m}{z^2} dz = -d\left(-\frac{GM_S m}{z}\right)$. La force gravitationnelle dérive donc bien d'une énergie potentielle,

dont l'expression, en prenant l'origine des potentiels à l'infini, est $E_P = -\frac{GM_S m}{z}$.

REMARQUE : On peut le montrer dans le cas général, puis l'appliquer à cette trajectoire.

3. La seule force appliquée étant une force conservative, le théorème de l'énergie mécanique dans \mathcal{R} supposé galiléen assure que cette dernière est constante. Pour que la sonde s'affranchisse de l'influence du Soleil, il faut qu'elle puisse potentiellement atteindre l'infini. Or $E_m = \frac{1}{2}mv^2 + E_P \geq E_P(z), \forall z$. Ceci implique

$$E_m \geq \lim_{z \rightarrow +\infty} E_P(z) = 0$$

- En prenant les valeurs au point A , $E_m = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{GM_S m}{z_A} = \underline{16\text{GJ}} > 0$. **La sonde peut donc s'échapper de l'attraction solaire.**

4. Conservation de l'énergie mécanique : $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_S m}{z} = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{GM_S m}{z_A} \implies v = \sqrt{v_A^2 + 2GM_S \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_A} \right)}$.

5. La norme de l'accélération se calcule directement via le PFD : $a = \frac{GM_S}{z^2}$. cf tableau ci-dessous.

Distance au soleil	Vitesse de la sonde	Accélération attendue	$\frac{df_r}{dt}$ mesurée	Accélération mesurée (Partie I)
20 UA	14,770km.s ⁻¹	14,829 × 10 ⁻⁶ m.s ⁻²	2,2704 × 10 ⁻⁴ Hz.s ⁻¹	14,829 × 10 ⁻⁶ m.s ⁻²
40 UA	14,829km.s ⁻¹	3,7071 × 10 ⁻⁶ m.s ⁻²	5,6770 × 10 ⁻⁵ Hz.s ⁻¹	3,7080 × 10 ⁻⁶ m.s ⁻²
60 UA	13,183km.s ⁻¹	1,6476 × 10 ⁻⁶ m.s ⁻²	2,5239 × 10 ⁻⁵ Hz.s ⁻¹	1,6485 × 10 ⁻⁶ m.s ⁻²
87,060 UA	12,240km.s ⁻¹	0,78256 × 10 ⁻⁶ m.s ⁻²	1,1995 × 10 ⁻⁵ Hz.s ⁻¹	0,78346 × 10 ⁻⁶ m.s ⁻²

6. En dérivant cette relation, on obtient $a_{mes(t)} = \frac{dv}{dt}(t) = -\frac{c}{2f} \frac{df_r}{dt}(t)$.

7. cf valeurs dans le tableau. **L'écart entre le modèle et l'expérience est faible mais stable, mise à part pour $z = 20\text{UA}$.** Pour cette distance, les approximations faites (Terre et Soleil confondus et trajectoire rectiligne) ne sont certainement pas justifiées (0,5% d'écart pour les distances).

8. En omettant les valeurs pour $z = 20\text{UA}$, on trouve en moyenne $a_p \sim 1 \times 10^{-9}\text{m.s}^{-2}$, ce qui est **en accord** avec la valeur annoncée en introduction.