

FILTRAGE - ONDES - MÉCANIQUE

I. Pickup de guitare électrique

1. \triangleright Il s'agit d'un filtre **passé-bas**.
 \triangleright On lit la fréquence de résonance au maximum de gain du filtre, soit à $f_r = 3,0 \text{ kHz}$.
 \triangleright L'asymptote Basse Fréquence (BF) est $G_{dB} = 0$. Celle à Haute Fréquence (HF) possède une pente de $\frac{-40-20}{\log(3.10^4)-\log(10^4)} \approx -42 \text{ dB/dec}$. Le filtre correspondant peut être un **passé-bas du second ordre**.
2. (i) **Passé-bas du premier ordre**. Asymptote HF (-20 dB/dec) insuffisante.
 (ii) Ce filtre, **passé-bas du 2ème ordre, convient** au diagramme proposé (en prenant $H_0 = 1$ et Q adapté pour qu'il y ait résonance à 3 kHz avec le bon gain).
 (iii) La pente de l'asymptote HF est positive et donc ne convient pas. Cette fonction de transfert ne donne de toute façon pas un filtre stable (gain qui tend vers $+\infty$ lorsque $\omega \rightarrow +\infty$).
 (iv) **Passé-bande** du 2ème ordre, qui ne convient donc pas ici.

3. a) Pour $x = 1$ la fonction de transfert se simplifie en $\underline{H}(x = 1) = \frac{H_0 Q}{j} = -j H_0 Q$. Le gain en décibel vaut donc : $G_{dB}(x = 1) = 20 \log(H_0 Q)$.

b) BF : $\underline{H} \underset{x \ll 1}{\sim} H_0 \implies G_{dB} \underset{x \ll 1}{\sim} 20 \log(H_0)$

HF : $\underline{H} \underset{x \gg 1}{\sim} \frac{H_0}{-x^2} \implies G_{dB} \underset{x \gg 1}{\sim} 20 \log(H_0) - 40 \log x$

Les asymptotes se croisent lorsque $20 \log(H_0) = 20 \log(H_0) - 40 \log x$, c'est-à-dire pour $x = 1$, soit $\omega = \omega_0$.

4. \triangleright À l'aide de l'asymptote BF, on a : $20 \log(H_0) = 0 \implies H_0 = 1$.
 \triangleright L'intersection des asymptotes BF et HF se produit en $f_0 \approx 3,2 \text{ kHz} \pm 0,2 \text{ kHz}$.
 \triangleright À la pulsation propre ($x = 1$) on lit un gain en décibel $G_{dB}(x = 1) = +12 \text{ dB} = 20 \log Q \implies Q = 10^{12/20} \approx 4$.

5. On lit les gains en décibel sur les diagrammes de Bode et on en déduit l'amplitude du signal sinusoïdal de sortie :

$$G_{dB} = 20 \log \left(\frac{U_s}{U_e} \right) \implies U_s = U_e 10^{G_{dB}/20}$$

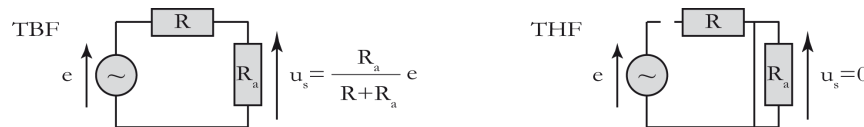
- \triangleright Pour $f = 300 \text{ Hz}$, $G_{dB} = 0$, donc $U_s = U_e = 1,0 \text{ V}$.
- \triangleright Pour $f = 3,0 \text{ kHz}$ (résonance), $G_{dB} = 13 \text{ dB}$, donc $U_s = 4,5 \text{ V}$.
- \triangleright Pour $f = 8,0 \text{ kHz}$, $G_{dB} = -15 \text{ dB}$, donc $U_s = 0,18 \text{ V}$.

6. a) On constate que l'harmonique de rang 6 coïncide avec 2 kHz (rq : l'harmonique 5 n'apparaît pas dans le signal). La fréquence du fondamental est donc $f = 330 \text{ Hz}$.
- b) On lit graphiquement les valeurs de « magnitude » pour les fréquences demandées. On en déduit l'amplitude U_s de l'harmonique une fois filtré grâce à la question 5..

f_k (kHz)	M_k (magnitude) (dB)	$U_{ek} = U_{ref} 10^{M_k/20}$ (V)	$U_{sk} = U_{ref} 10^{(M_k+G_{dB}(f_k))/20}$ (V)
0,3	50	3,2	3,2
3	10	0,032	0,14
8	-8	0,0040	0,00071

REMARQUE : Il est un peu abusif de considérer 2 chiffres significatifs pour les tensions compte tenu du fait que les gains/magnitudes en dB sont lues graphiquement, le passage à l'exponentielle faisant perdre un chiffre significatif en général.

7.



Il s'agit a donc priori d'un filtre **passé-bas**.

8. D'après la loi des nœuds en termes de potentiel : $\frac{E-U_s}{R+jL\omega} - j(C+C_c)\omega U_s - \frac{U_s}{R_a} = 0$.
Ainsi :

$$E = U_s \left[(R + jL\omega) \left(\frac{1}{R_a} \right) + 1 \right] = U_s \left[1 + \frac{R}{R_a} - L(C + C_c)\omega^2 + j\omega \left(\frac{L}{R_a} + R(C + C_c) \right) \right]$$

D'où la fonction de transfert, simplifiée car $R_a \gg R$:

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + j\omega \left(\frac{L}{R_a} + R(C + C_c) \right) - L(C + C_c)\omega^2}$$

REMARQUE : Au lieu de la LNTP, on aurait pu utiliser encore la relation du pont diviseur de tension en additionnant les admittances du groupement parallèle (C, C_c, R_a) .

9. On identifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 = 1 \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L(C + C_c)}} \implies f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 3,1 \text{ kHz} \\ \frac{1}{\omega_0 Q} = \frac{L}{R_a} + R(C + C_c) \implies Q = \frac{\sqrt{L(C + C_c)}}{\frac{L}{R_a} + R(C + C_c)} = 8,3 \end{array} \right.$$

Les valeurs trouvées ici sont cohérentes avec les mesures faites sur le diagramme de Bode, sauf celle de Q .
REMARQUE : Manifestement la bonne valeur pour R était plutôt $R = 20 \text{ k}\Omega$, qui donne $Q = 4,3 \dots$ erreur dans l'énoncé !

II. Cordes vibrantes

II.1. Propagation d'un signal le long d'une corde

1. On lit $t_1 = 2,0 \text{ ms}$. La perturbation a mis un temps t_1 pour parcourir une distance x_M à la célérité c , d'où :

$$c = \frac{x_M}{t_1} = 40 \text{ m.s}^{-1}$$

2. On pose $c = \alpha T^a \mu^b$, avec α une constante multiplicative. Or :

$$\begin{cases} [T] = M.L.T^{-2} \\ [\mu] = M.L^{-1} \\ [c] = L.T^{-1} \end{cases} \Rightarrow L.T^{-1} = M^{a+b}.L^{a-b}.T^{-2a} \Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a-b=1 \\ -2a=-1 \end{cases} \Rightarrow a = -b = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \alpha \sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

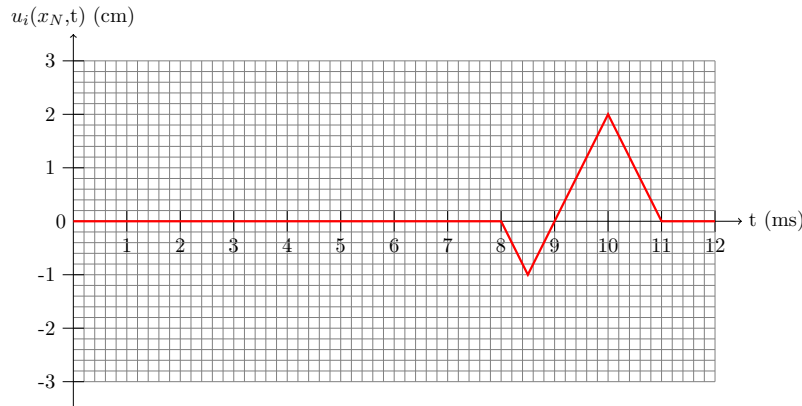
3. Tendre la corde fait **augmenter** T , et donc c .

Augmenter la masse de la corde pour une longueur fixée fait augmenter μ , donc **diminuer** c .

L'amplitude de la perturbation n'a **aucune influence sur** c tant que milieu est caractérisé par une équation de propagation d'ondes qui est linéaire¹, en pratique pour des ondes d'amplitudes modérées.

4. On lit sur le graphe de $u_i(M, t)$ que le point M est affecté pendant $\Delta t = 3,0 \text{ ms}$. Cela correspond alors à une longueur $L = c\Delta t = 12 \text{ cm}$.

5. La perturbation arrive en N à la date $t_2 = \frac{x_N}{c} = 8,0 \text{ ms}$. La perturbation étant progressive, elle ne se déforme pas. Ainsi :



6. La propagation vers les x croissants sans déformation à la vitesse c permet d'écrire

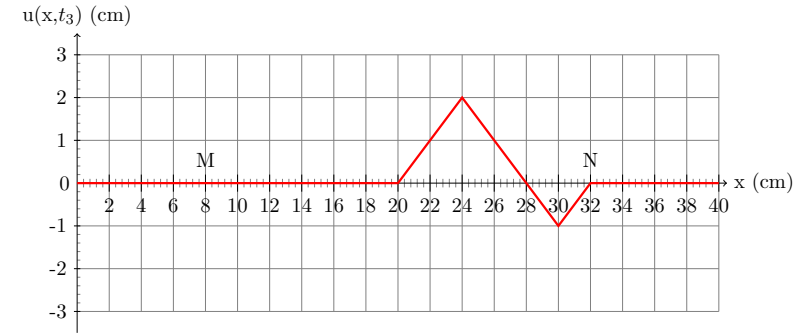
$$u_i(x, t_3) = u_i(x_M, t_3 - \frac{x - x_M}{c}) = u_i(x_M, -\frac{x - x_M - ct_3}{c}).$$

Cette relation permet de voir que la forme du signal spatial est obtenue à partir du signal temporel par une **symétrie par rapport à l'axe des ordonnées** (signe $-$), suivie d'une **dilatation horizontale de facteur c** (ce qui place le front (début de la perturbation) à $x = -8 \text{ cm}$) et d'une **translation horizontale de $x_M + ct_3 = 40 \text{ cm}$** .

Ainsi, à la date $t_3 = 8,0 \text{ ms}$, le début de la perturbation se trouve maintenant au point N d'abscisse

1. cf programme de SPE.

$x_N = 32 \text{ cm}$. Le signal ne se déformant pas, il occupe toujours une longueur $L = 12 \text{ cm}$. Pour terminer le schéma de la corde, on peut déterminer les positions du minimum et du maximum, qui interviennent respectivement $\Delta t_m = 0,5 \text{ ms}$ et $\Delta t_M = 2 \text{ ms}$ après le début de la perturbation. Ils sont donc situés respectivement à une distance $\Delta x_m = c\Delta t_m = 2 \text{ cm}$ et $\Delta x_M = c\Delta t_M = 8 \text{ cm}$ à gauche du point N . D'où l'allure suivante :



7. Au point de fixation, la corde ne bouge pas. En l'absence d'onde réfléchi on aurait donc $u_i(L, t) = 0 \quad \forall t$ donc $u_i(x, t) = 0 \quad \forall (x, t)$, il n'y a pas d'onde incidente. Cela est absurde donc il existe une onde réfléchi $u_r(x, t)$ vérifiant

$$u_r(L, t) = -u_i(L, t) \quad \forall t.$$

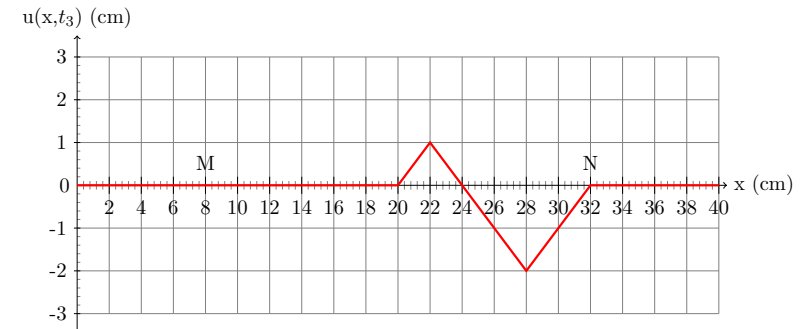
Cette onde se propage dans le sens des x décroissants. On en déduit

$$u_r(x, t) = u_r(L, t + \frac{x-L}{c}) = -u_i(L, t + \frac{x-L}{c}) = -u_i(x_M, t + \frac{x-L}{c} - \frac{L-x_M}{c})$$

d'où

$$u_r(x, t) = -u_i\left(x_M, t + \frac{x + x_M - 2L}{c}\right).$$

Par conséquent $u_r(x, t_4) = -u_i\left(x_M, \frac{x}{c} + t_{rM}\right)$ en notant $t_{rM} = t_4 + \frac{x_M - 2L}{c} = -3 \text{ ms}$. On en déduit que ce profil spatial s'obtient à partir du profil temporel $u_i(x_M, t)$ par une **translation de 3 ms** vers la droite, suivie d'une **dilatation horizontale de facteur c** (pour passer sur l'axe des x , et qui donne toujours à la perturbation une étendue spatiale de 12 cm) et d'une **symétrie par rapport à l'axe des abscisses Ox** (à cause du signe $-$ devant). En particulier la perturbation débute à la position x_d telle que $\frac{x_d}{c} - t_{rM} = 2 \text{ ms}$ (instant du début de la perturbation incidente en x_M , cf figure énoncé), d'où $x_d = 20 \text{ cm}$. D'où l'allure ci-dessous.



II.2. Positionnement des frettes d'une guitare

8. Un mode propre de vibration sinusoïdal est une **vibration en régime libre compatible avec les conditions aux limites imposées par le confinement** du milieu de propagation. En l'occurrence, ces conditions sont une absence totale de vibration en O et A donc le mode propre prend la forme d'une **onde stationnaire** (c'est-à-dire qui vibre sur place, sans effet de propagation). Sa forme générale est $u(x, t) = U \sin(kx + \varphi) \sin(\omega t + \psi)$ avec $k = \frac{\omega}{c}$ le nombre d'onde angulaire (ou pulsation spatiale) et ω la pulsation temporelle. Ses nœuds sont espacés de $\frac{\lambda}{2}$, en notant $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ la période spatiale. L'existence d'un nombre entier de fuseaux $n \in \mathbb{N}^*$ implique alors que

$$L = n \frac{\lambda_n}{2} \Leftrightarrow f_n = n \frac{c}{2L}$$

La forme des modes propres correspondant à l'absence de mouvement en O ($x = 0$ donc $\varphi = 0$) et en A ($x = L$) est alors

$$u_n(x, t) = U \sin(k_n x) \sin(2\pi f_n t + \psi) \quad \text{avec} \quad k_n = \frac{n\pi}{L}$$

9. Le mode n a n fuseaux, donc $n + 1$ nœuds. D'où l'allure à deux instants différents :



10. La note entendue correspond à la fréquence du mode fondamental : $c = 2L f_1 = 1,4 \times 10^2 \text{ m.s}^{-1}$.

11. Cherchons la longueur L' à donner à la corde vibrante pour obtenir la fréquence $f'_1 = 2f_1$ avec la même célérité des ondes, pour le mode fondamental $n = 1$:

$$L' = \frac{c}{2f'_1} = \frac{c}{4f_1} \Rightarrow L' = \frac{L_{La}}{2}$$

La frette permettant de monter d'une octave doit donc être placée en plein milieu de la longueur totale OA disponible, donc à **égale distance du sillet de tête et du chevalet**.

12. Pour passer d'un demi-ton au demi-ton supérieur, on multiplie la fréquence par K . En réalisant 12 fois l'opération, on monte d'une octave, c'est-à-dire que la fréquence a été multipliée par 2 :

$$K^{12} = 2 \Rightarrow K = 2^{1/12} \approx 1,059$$

13. Le $La\#$ a une fréquence $K f_1$. La longueur de corde nécessaire pour jouer cette note est alors :

$$L_{La\#} = \frac{c}{2K f_1} = \frac{L_{La}}{K}$$

Ainsi, la distance entre les deux premières frettes s'écrit :

$$\Delta x = L_{La} - L_{La\#} = L_{La} \left(1 - \frac{1}{K}\right) \approx 3,59 \text{ cm}$$

N.B. : Par le même procédé, on peut calculer facilement la position de la m-ième frette, permettant de monter de m tons :

$$\frac{\Delta x_m}{L_{La}} = 1 - \frac{1}{K^m} = 1 - \frac{1}{2^{m/12}}$$

14. On impose un nœud au quart de la longueur de la corde. Ainsi, on empêche tous les modes n'ayant pas un nœud à cet endroit d'exister, notamment le mode fondamental ainsi que les modes $n = 2$ et $n = 3$. Le premier mode possible est alors $n = 4$ (puis ses multiples entiers $n = 8, 12, \dots$). On obtient donc exactement le même effet en effleurant la corde aux trois-quarts de sa longueur. La fréquence de vibration de ce mode est alors telle que :

$$L_{La} = 4 \frac{c}{2f} \Rightarrow f = 2 \frac{c}{L_{La}} = 4f_1 \approx 440 \text{ Hz}$$

On obtient ainsi le La deux octaves au-dessus (« $La3$ »).

III. Manège pendulaire

1. Le référentiel galiléen est défini par le **principe d'inertie** (1ère loi de Newton) : *il existe des référentiels privilégiés, appelés référentiels galiléens, dans lesquels tout point matériel isolé a un mouvement rectiligne uniforme.* En pratique le caractère galiléen est vérifié quantitativement par la validité expérimentale du Principe Fondamental de la Dynamique (PFD, 2nde loi de Newton).

Les **dimensions du manège** étant très faibles par rapport au rayon terrestre et la **durée d'un tour de manège** très petite devant 24 h, le référentiel terrestre peut être considéré galiléen.

2. Vecteur position : $\vec{OM} = (L + d \sin \alpha) \vec{u}_r + (h - d \cos \alpha) \vec{u}_z$.

3. En coordonnées cylindriques, le vecteur position s'écrit $\vec{OM} = r \vec{u}_r + z \vec{u}_z$. La nacelle décrit un **cercle** de **rayon** $R = L + d \sin \alpha$, **d'axe** (Oz) , à la **hauteur** $z_0 = h - d \cos \alpha$, parcouru à la vitesse angulaire constante $\dot{\theta} = \omega$. M a donc un **mouvement circulaire uniforme**, d'équation intrinsèque : $r = R$ et $z = z_0$.

4. On a donc $\vec{OM} = R \vec{u}_r + z_0 \vec{u}_z$.

Vitesse : $\vec{v} = \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = R \dot{\theta} \vec{u}_\theta = R \omega \vec{u}_\theta = (L + d \sin \alpha) \omega \vec{u}_\theta$

Accélération : $\vec{a} = \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = -R \omega^2 \vec{u}_r = -(L + d \sin \alpha) \omega^2 \vec{u}_r$.

5. Forces extérieures appliquées à la nacelle :

- poids $m \vec{g} = -mg \vec{u}_z$;

- tension de la tige $\vec{T} = -T \sin \alpha \vec{u}_r + T \cos \alpha \vec{u}_z$, en notant $T = \|\vec{T}\|$.

6. Le PFD appliqué au système {nacelle}, dans le référentiel \mathcal{R} considéré galiléen : $m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{T}$.

On projette sur \vec{u}_r et \vec{u}_z de la base cylindrique (il n'y a rien selon \vec{u}_θ) :

$$\begin{cases} (\vec{u}_r) : & -m(L + d \sin \alpha) \omega^2 = -T \sin \alpha \\ (\vec{u}_z) : & 0 = -mg + T \cos \alpha \end{cases}$$

La projection sur \vec{u}_z donne alors : $T = \frac{mg}{\cos \alpha}$.

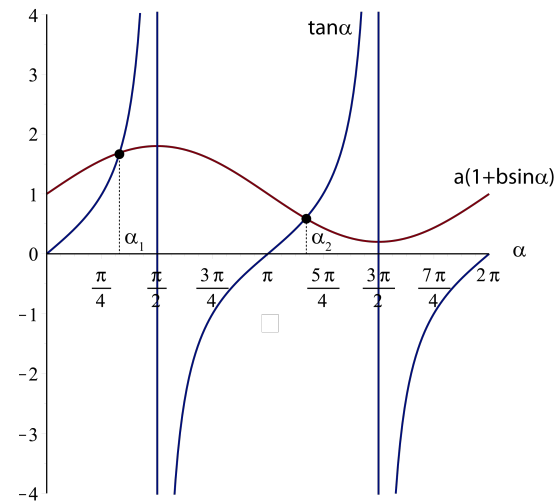
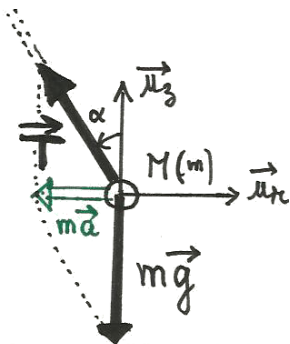
7. En éliminant T dans la projection sur \vec{u}_r du PFD, il vient :

$$-m(L + d \sin \alpha) \omega^2 = -mg \tan \alpha \iff \frac{L \omega^2}{g} \left(1 + \frac{d}{L} \sin \alpha \right) = \tan \alpha \quad (1)$$

On trouve la relation demandée avec $a = \frac{L \omega^2}{g}$ et $b = \frac{d}{L}$.

La masse m n'intervient pas car nous avons **négligé les frottements**. Seuls le poids et la tension de la tige interviennent, tension qui s'adapte justement à la masse suspendue à l'attache.

8. Les valeurs de α correspondent à l'intersection des deux courbes.

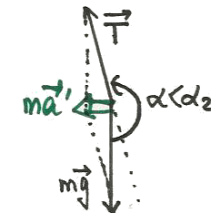
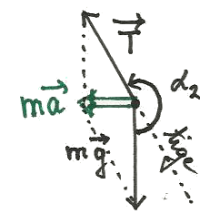
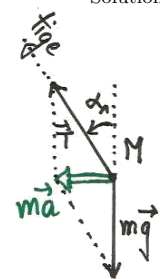


Il y a donc une solution $\alpha_1 \in [0, \pi/2]$ et une autre $\alpha_2 \in [\pi, 3\pi/2]$.

9.

Solution α_1 - STABLE

Solution α_2 - INSTABLE



Rapprochement de l'axe $Oz \Rightarrow$ éloignement.

Éloignement de l'axe $Oz \Rightarrow$ éloignement.

Stabilité

Pour $\alpha < \alpha_1$ (ou α_2), l'accélération normale est alors plus faible en norme. Cela implique que le rayon de courbure de la trajectoire va s'accroître. Or dans le cas de gauche la distance à l'axe est plus petite qu'à l'équilibre, donc M revient vers sa position d'équilibre. C'est une position **stable**. Inversement, dans le cas de droite la distance à l'axe est plus grande qu'à l'équilibre, donc M s'éloigne encore plus de sa position d'équilibre. C'est une position **instable**. Bien sûr on obtient le même résultat si on considère au contraire un angle supérieur à la position d'équilibre.

REMARQUE : La position instable correspond à la nacelle renversée. Cette position d'équilibre n'existerait pas si la tige était remplacée par un câble, car il serait alors détendu, donc l'hypothèse cinématique liée à la longueur du fil serait alors invalidée.

10. On résout l'équation $a(1 + b \sin \alpha) = \tan \alpha$, ce qui donne $\omega = \sqrt{\frac{g \tan \alpha}{L + d \sin \alpha}}$.

A.N. : $\omega = 0,68 \text{ rad.s}^{-1} = 6,6 \text{ tr.min}^{-1}$.

En exploitant la relation (1), l'expression de l'accélération subie par les passagers devient $a = g \tan \alpha \approx 0,58g$, ce qui est tout à fait supportable.