

ÉLECTRICITÉ - RSF et FILTRAGE

I. Circuit de détection d'un signal RMN (d'après X-Cachan PSI 2017)

- À Basse Fréquence (BF) le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil. À Haute Fréquence (HF), le condensateur se comporte comme un fil et la bobine comme un interrupteur ouvert. Donc dans les deux cas le circuit est ouvert et le courant i est nul, donc $u_s = Ri = 0$. Ce comportement correspond à un **filtre passe-bande**.
- On pose $u_e(t) = \Re(\underline{u}_e(t))$ avec $\underline{u}_e(t) = E e^{j\omega t}$. De même $u_s(t) = U_s \cos(\omega t + \varphi) = \Re(\underline{u}_s(t))$ avec $\underline{u}_s(t) = U_s e^{j(\omega t + \varphi)}$.
- En Régime Sinusoidal Forcé (RSF), le circuit est composé d'impédances en série. La relation du pont diviseur de tension permet d'écrire

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{R}{R + r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{R_t + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$$

- On revient à la forme en fraction rationnelle, dont le dénominateur doit s'écrire sous forme canonique $1 + \frac{jx}{Q} + (jx)^2$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, et le numérateur $H_0 jx/Q$ de sorte qu'à la résonance en $x = 1$ on ait $\underline{H} = H_0$:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j\omega RC}{j\omega R_t C + (j\omega)^2 LC + 1} = \frac{H_0 \frac{jx}{Q}}{1 + \frac{jx}{Q} + (jx)^2} = \frac{H_0}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

ce qui implique la détermination des paramètres caractéristiques suivants (et dans cet ordre) :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad , \quad Q = \frac{1}{R_t} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{et} \quad H_0 = \frac{R}{R_t}$$

- Le gain s'écrit $G(x) = \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2}}$. Les pulsations de coupure réduites satisfont $G(x_{1,2}) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$ avec $G_{\max} = H_0$. Ceci implique $Q(x - \frac{1}{x}) = \pm 1$ et conduit à $x_{\pm} = \mp \frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}$. On en déduit la largeur $\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{1}{Q}$ donc $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$.

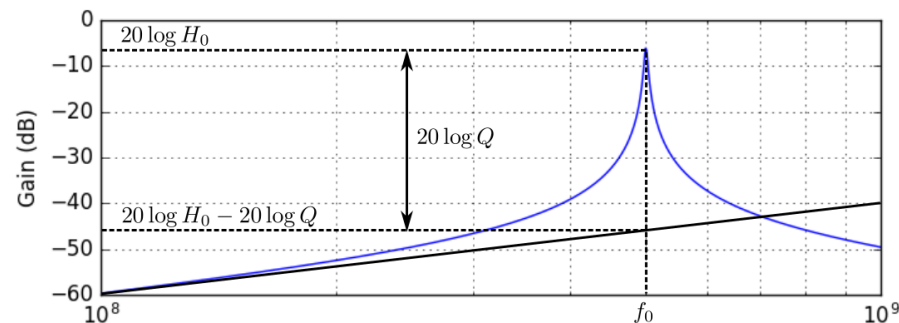
- À basse fréquence, on a $\underline{H} \underset{x \ll 1}{\sim} H_0 \frac{jx}{Q}$. Donc $G_{\text{dB}} \underset{x \ll 1}{\sim} 20 \log H_0 - 20 \log Q + 20 \log x$. Le gain admet donc une pente de $+20 \text{dB.dec}^{-1}$, ce qui est vérifié entre 10^7 et 10^8 Hz. Et la phase $\Phi = \arg(\underline{H}) \underset{x \ll 1}{\sim} \frac{\pi}{2}$, ce qui se vérifie aussi sur le graphe (asymptote à $+90^\circ$ entre 10^7 et 10^8 Hz).
 - À haute fréquence, on a $\underline{H} \underset{x \gg 1}{\sim} \frac{H_0}{jxQ}$. Donc $G_{\text{dB}} \underset{x \gg 1}{\sim} 20 \log H_0 - 20 \log Q - 20 \log x$. Le gain admet donc une pente de -20dB.dec^{-1} , ce qui est vérifié entre 10^9 et 10^{10} Hz. Et la phase $\Phi = \arg(\underline{H}) \underset{x \gg 1}{\sim} -\frac{\pi}{2}$, ce qui se vérifie aussi sur le graphe (asymptote à -90° entre 10^9 et 10^{10} Hz).

- Aux pulsations de coupure on a $G_{\text{dB}}(x_{1,2}) = G_{\text{dB,max}} - 3 \text{ dB}$. Sur le graphe de gain zoomé on observe que $G_{\text{dB}}(x_{1,2}) \approx -10 \text{ dB}$. On peut évaluer grossièrement l'écart de fréquences $f_{c2} - f_{c1}$ correspondant, qui est de l'ordre de 1 dixième de l'intervalle entre 4×10^8 et 5×10^8 Hz au voisinage de 5×10^8 Hz, donc $f_{c2} - f_{c1} \sim 1 \times 10^7$ Hz.

- Le graphe de gain zoomé donne une résonance en $f_0 \approx 5,0 \times 10^8$ Hz.

Le facteur de qualité peut alors être évalué grossièrement par $Q = \frac{f_0}{f_{c2} - f_{c1}} \sim 50$.

Autre méthode plus précise : On exploite l'une des asymptotes du gain explicitées ci-dessus : $G_{\text{dB}} \underset{x \ll 1}{\sim} 20 \log H_0 - 20 \log Q + 20 \log x$ qui croise l'axe $f = f_0 \Leftrightarrow x = 1$ en la valeur $20 \log H_0 - 20 \log Q$. On trace cette asymptote sur le graphe zoomé en partant du point $f = 10^8$ Hz, et en imposant une pente de $+20 \text{dB.dec}^{-1}$ (cf ci-dessous). Ainsi on obtient graphiquement la valeur de $20 \log Q$ par différence avec le gain maximal à la résonance $20 \log H_0$.



De cette façon on obtient $20 \log Q \approx 40$ donc $Q \approx 100$. Ce résultat est plus fiable compte-tenu du manque de précision sur la lecture de $f_{c2} - f_{c1}$.

- On connaît $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R_t} \sqrt{\frac{L}{C}}$. On en déduit $C = \frac{1}{2\pi f_0 Q R_t} = 3 \times 10^{-12} \text{ F}$ et

$$L = \frac{R_t Q}{2\pi f_0} = 3 \times 10^{-8} \text{ H.}$$

- Le signal à détecter $u_e(t)$ a pour pulsation centrale ω_p . En faisant varier C , on déplace ω_0 de façon à observer une résonance lorsque $\omega_0 = \omega_p$. On peut alors **mesurer** ω_p de façon d'autant plus précise que le **bruit est drastiquement réduit en dehors de la bande passante étroite**. S'il existe plusieurs types de protons (c'est-à-dire avec des environnements chimiques différents), on observera plusieurs pics de résonance pour toutes les pulsations ω_{p_i} caractéristiques de ces environnements, ce qui donne un « spectre RMN ».
- En utilisant la fonction de transfert \underline{H} sous forme de fraction rationnelle et en remplaçant tous les produits par $j\omega$ par une dérivée temporelle, on obtient l'équation différentielle, valable pour tout régime :

$$\left(1 + \frac{jx}{Q} + (jx)^2\right) \underline{u}_s = H_0 \frac{jx}{Q} \underline{u}_e \Leftrightarrow \frac{1}{\omega_0^2} \ddot{u}_s + \frac{1}{Q\omega_0} \dot{u}_s + u_s = \frac{H_0}{Q\omega_0} \dot{u}_e$$

- La réponse en régime sinusoidal forcé correspond à l'étude précédente, en notation complexe. On se place très près de la résonance donc $\underline{H} \approx H_0$, donc $\underline{u}_s \approx H_0 \underline{u}_e$ donc $u_{s,p}(t) \approx H_0 u_e(t)$.
- Le facteur de qualité est $Q \gg \frac{1}{2}$ donc le régime transitoire est pseudo-périodique :

$$u_{sH}(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{2Q}{\omega_0} \quad \text{et} \quad \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \approx \omega_0$$

- On a $u_e(0^-) = 0$ et $u_e(0^+) = E$ (analogue au cas d'un échelon de tension). Les grandeurs qui doivent rester continues sont la tension aux bornes du condensateur (ou sa charge) et

le courant en présence d'une bobine. Le condensateur est initialement déchargé et le courant est nécessairement nul car le régime est stationnaire pour $t < 0$, donc $u_s(0^+) = Ri(0^+) = 0$.

La loi des mailles donne alors $E = u_L(0^+) = L \frac{di}{dt}(0^+)$, donc $\frac{du_s}{dt}(0^+) = R \frac{di}{dt}(0^+) = \frac{RE}{L}$.

Pour en déduire les valeurs des constantes A et B , il faut d'abord ajouter la solution particulière $u_{sp}(t) \approx H_0 u_e(t)$, donc

$$u_s(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \left(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \right) + H_0 E \cos(\omega_0 t) e^{-\frac{t}{T_2}}.$$

Les conditions initiales mènent aux valeurs suivantes :

$$A = -H_0 E \quad \text{et} \quad B = \frac{E}{\omega} \left(\frac{R}{L} + H_0 \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{\tau} \right) \right).$$

12. Avec les valeurs précédentes, on trouve $\tau \approx 6 \times 10^{-8} \text{ s}$, ce qui est totalement négligeable devant $T_1 \approx 1 \text{ s}$. Le régime transitoire est donc **totalement négligeable au regard de la durée du signal à détecter**.

II. Recharge d'un pacemaker (d'après E3A PSI 2017)

1. • Dans la maille primaire : $e_g = \left(R_g + R_p + \frac{1}{j\omega C_p} + j\omega L_p \right) i_p + j\omega M i_s$;

• Dans la maille secondaire : $0 = j\omega M i_p + \left(R_L + R_s + \frac{1}{j\omega C_s} + j\omega L_s \right) i_s$.

2. En réinjectant la seconde relation dans la première, et en notant que $\underline{u}_g = e_g - R_g i_p$ on obtient

$$\underline{u}_g = \underline{Z} i_p \quad \text{avec} \quad \underline{Z} = R_p + \frac{1}{j\omega C_p} + j\omega L_p - \frac{(j\omega M)^2}{R_L + R_s + \frac{1}{j\omega C_s} + j\omega L_s}.$$

3. En réutilisant les résultats précédents, on a $\underline{u}_L = -R_L i_s = -\frac{j\omega M R_L}{(R_L + R_s + \frac{1}{j\omega C_s} + j\omega L_s)} i_p$ avec $\underline{u}_g = \underline{Z} i_p$, donc

$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{j\omega M R_L}{\left(R_L + R_s + \frac{1}{j\omega C_s} + j\omega L_s \right) \underline{Z}}.$$

• À basse fréquence, on a $\underline{Z} \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{j\omega C_p}$ donc on obtient $\underline{H}(j\omega) \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} -(j\omega)^3 R_L C_s M C_p \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0$.

• À haute fréquence, on a $\underline{Z} \underset{\omega \rightarrow \infty}{\sim} j\omega \left(L_p - \frac{M^2}{L_s} \right)$ donc on obtient $\underline{H}(j\omega) \underset{\omega \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{M R_L}{j\omega (L_s L_p - M^2)} \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0$.

Il s'agit d'un comportement de type filtre **passes-bande d'ordre 4** (degré du dénominateur de \underline{H} sous forme de fraction rationnelle). On a donc intérêt à travailler à des fréquences « **intermédiaires** » telles que le gain soit raisonnablement élevé.