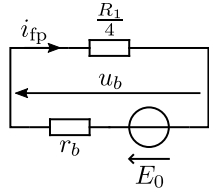


ÉLECTRICITÉ

I. Étude de circuits électriques présents dans des automobiles

1. Un résistor reçoit une puissance $\mathcal{P}_i = \frac{U^2}{R_i}$, d'où $R_i = \frac{U^2}{\mathcal{P}_i}$, ce qui donne $R_1 = 29 \Omega$, $R_2 = 3,2 \Omega$ et $R_3 = 6,9 \Omega$.

2. Le schéma est le suivant

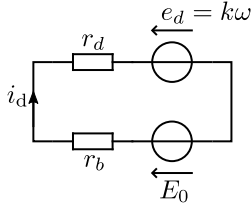


Les quatre résistances R_1 en dérivation équivalent à une seule de valeur $R_{eq} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1}\right)^{-1} = \frac{R_1}{4}$.

La loi des mailles conduit à $i_{fp} = \frac{E_0}{r_b + R_1/4} = 1,9 \text{ A}$.

Par la relation du pont diviseur de tension on obtient alors $u_b = \frac{E_0}{1 + 4r_b/R_1} = 14 \text{ V}$.

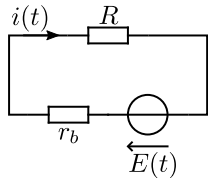
3.



Le schéma équivalent est ci-contre.

La loi des mailles conduit à $i_d = \frac{E_0 - k\omega}{r_b + r_d} = 6.10^2 \text{ A}$.

4. a)



Le schéma équivalent est ci-contre.

De même que précédemment, la loi des mailles conduit à $i(t) = \frac{E(t)}{r_b + R}$.

b) Soit δq la quantité élémentaire de charge sortant par la borne + du générateur entre les instants t et $t + dt$. On a $E(t) = E_0 - \alpha q(t)$ et $E(t + dt) = E_0 - \alpha(q(t) + \delta q)$, d'où une variation $dE = E(t + dt) - E(t) = -\alpha \delta q$.

D'autre part le courant est le même partout dans la branche puisque le régime est lentement variable (approximation des régimes quasi-stationnaires), donc $i(t) = \frac{\delta q}{dt}$. On en déduit $\frac{dE}{dt} = \dot{E}(t) = -\alpha i(t)$.

Avec le résultat précédent cela conduit à $\tau \dot{E} + E = 0$ avec $\tau = \frac{r_b + R}{\alpha}$.

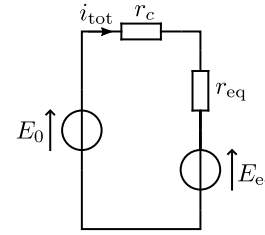
c) La solution s'écrit sous la forme $E(t) = \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$, où λ est une constante. À l'instant initial $t = 0$ on a

$E(t) = E_0 = \lambda$ donc finalement $E(t) = E_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = \frac{r_b + R}{\alpha}$.

d) On peut utiliser la loi précédemment établie, en prenant $R = \left(\frac{2}{R_1} + \frac{2}{R_2}\right)^{-1}$. On cherche l'instant t_1 vérifiant

$$E_1 = E(t_1) = E_0 \cdot e^{-\frac{t_1}{\tau}} \Leftrightarrow t_1 = \tau \ln\left(\frac{E_0}{E_1}\right) = 4,4 \cdot 10^4 \text{ s} \approx 12 \text{ h}.$$

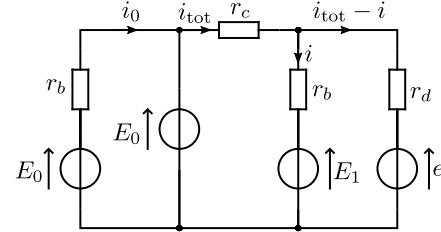
5. PREMIÈRE MÉTHODE : on simplifie le circuit en associant les générateurs de Thévenin qui sont en dérivation (il faut passer par leur représentation de Norton associée). On obtient alors le circuit suivant :



Les équivalences et associations de générateurs conduisent à $r_{eq} = \left(\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_d}\right)^{-1}$ et $e_{eq} = \frac{r_d E_1 + r_b e_d}{r_b + r_d}$.

La loi des mailles conduit à $i_{tot} = \frac{E_0 - e_{eq}}{r_c + r_{eq}} = \frac{E_0(r_b + r_d) - r_d E_1 - r_b e_d}{r_c r_b + r_c r_d + r_b r_d} = 1,4 \cdot 10^2 \text{ A}$.

DEUXIÈME MÉTHODE : On introduit des courants dans le circuit tel qu'il est et on le traite avec les lois de Kirchhoff. Dans la maille de gauche : $E_0 - r_b i_0 = E_0$ donc $i_0 = 0$. Grâce à l'alternateur la batterie ne débite effectivement pas de courant.



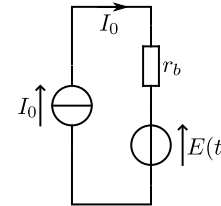
On écrit les deux autres lois de maille indépendantes, sachant que la loi des nœuds est déjà écrite sur le schéma :

$$E_0 = r_c i_{tot} + r_b i + E_1 \quad (1)$$

$$E_0 = r_c i_{tot} + r_d (i_{tot} - i) + e_d \quad (2)$$

On élimine ensuite l'inconnue i au profit de i_{tot} par la combinaison linéaire $r_d(1) + r_b(2)$, ce qui conduit à la même expression que précédemment.

6. a)



Le schéma équivalent est ci-contre.

De même que précédemment, $E = E_0 + \alpha_{ch} \cdot q$ donc $\frac{dE}{dt} = \alpha_{ch} \cdot \frac{\delta q}{dt} = \alpha_{ch} \cdot I_0$. Par intégration entre $t = 0$ tel que $E(0) = E_2$ et un instant t quelconque, on obtient $E(t) = E_2 + \alpha_{ch} \cdot I_0 \cdot t$.

Posons l'instant t_2 tel que $E(t_2) = E_0$, on obtient $t_2 = \frac{E_0 - E_2}{\alpha_{ch} I_0} = 1,2 \cdot 10^5 \text{ s} \approx 34 \text{ h}$.

b) En supposant que la période T des impulsions est très courte devant la durée totale de la charge t'_2 (vraisemblable d'après le calcul précédent), on peut considérer que la batterie est chargée par un courant moyen qui vaut $I_{moy} = \frac{1}{T} \int_0^T I_0 dt = \eta I_0$. Le nouveau temps de charge est donc

$$t'_2 = \frac{t_2}{\eta} = \frac{E_0 - E_2}{\eta \alpha_{ch} I_0} = 38 \text{ h}.$$

7. La « tension à pleine charge » correspond à $E_0 = 14 \text{ V}$.

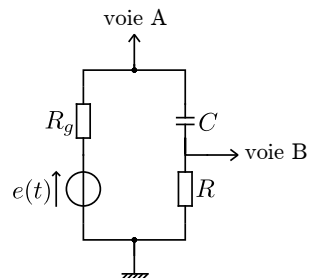
La « tension nominale » correspond à la tension $E_3 = 12 \text{ V}$ en dessous de laquelle il ne faut pas descendre pour le bon fonctionnement.

D'après la question 4.b) on a $E_3 = E_0 - \alpha q$ d'où $q = \frac{E_0 - E_3}{\alpha} = 2,5 \cdot 10^5 \text{ C} = \frac{2,5 \cdot 10^5}{3600} \text{ A.h} = 69 \text{ A.h} \approx 70 \text{ A.h}$. La « capacité de charge » correspond donc à la quantité de charge que l'on peut extraire de la batterie dans les conditions normales de fonctionnement.

II. Étude de quelques méthodes de mesure de capacité

II.1. Détermination graphique

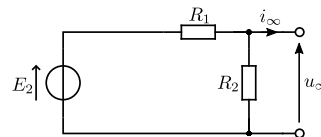
- La tension aux bornes d'un condensateur évolue continûment, donc $u_c(0^+) = u_c(0^-) = -E$.
La loi des mailles pour tout $t > 0 : 0 = E - (R_g + R)i - u_c$.
À $t = 0^+$, cela donne $0 = E - (R_g + R)i(0^+) - u_c(0^+) = 2E - (R_g + R)i(0^+)$ d'où $i(0^+) = \frac{2E}{R_g + R}$.
- Comme $i = C\dot{u}_c$, la loi des mailles ci-dessus conduit à $\tau\dot{u}_c + u_c = E$, avec $\tau = (R_g + R)C$.
- La solution générale est la somme d'une solution particulière constante E et d'une solution générale de la forme $\lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$, avec λ une constante d'intégration. Elle vérifie la condition initiale $u_c(0^+) = -E = \lambda + E \Leftrightarrow \lambda = -2E$. Finalement la solution s'écrit $u_c(t) = E \left(1 - 2e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$, $\forall t > 0$.
- $u_c(t_1) = 0,80E = E \left(1 - 2e^{-\frac{t_1}{\tau}}\right) \Leftrightarrow e^{-\frac{t_1}{\tau}} = 0,10 \Leftrightarrow t_1 = \tau \ln 10$.
- L'oscilloscope est assimilable (en mode DC) à une simple résistance $R_o \sim 1 \text{ M}\Omega$. Tant que cette résistance est grande devant $R_g + R$ présente dans la branche d'étude, on peut négliger le courant détourné dans l'oscilloscope.
- La **voie B** représente la tension u_c , qui passe d'un régime permanent $u_c = e = -E_1$ au régime permanent suivant $u_c = e = E_1$, ou l'inverse. Il s'agit donc de la **courbe (1)**, et on peut y lire $E_1 = 3,0 \text{ V}$. La **voie A** correspond à la tension de sortie du GBF, qui vaut $u_g = e - R_g i$. Comme le courant présente des discontinuités à chaque basculement, il n'est pas nul après le basculement d'où un décalage de u_g par rapport e . Il s'agit donc bien de la **courbe (2)**.
- Au point P , on est à l'instant t_0^+ tel que $e(t_0^+) = E_1$ (et $e(t_0^-) = -E_1$). Le courant lui passe du régime permanent $i(t_0^-) = 0$ à la valeur $i(t_0^+)$ telle que par la loi des mailles : $i(t_0^+) = \frac{e(t_0^+) - u_c(t_0^+)}{R_g + R} = \frac{2E_1}{R_g + R}$. On en déduit $u_g(t_0^+) = e(t_0^+) - R_g i(t_0^+)$ d'où $u_g(t_0^+) = E_1 - E_1 \frac{2R_g}{R_g + R} = E_1 \frac{R - R_g}{R + R_g}$.
On lit $E_1 = 3,0 \text{ V}$ et $u_g(t_0^+) = 1,0 \text{ V}$ sur l'oscillogramme. On en déduit $R_g = R \frac{E_1 - u_g(t_0^+)}{E_1 + u_g(t_0^+)} = 50 \Omega$.
- La valeur de E_1 était déjà nécessaire pour la question précédente... On lit $E_1 = 3,0 \text{ V}$.
Sur le graphe on lit l'instant t_1 auquel u_c croise la ligne « 90% » : $t_1 - t_0 = 0,425 \text{ ms}$. À cet instant on a alors $u_c(t_1) = 0,8E_1$, d'où $t_1 - t_0 = \tau \ln 10$ d'après la question 4., avec $\tau = (R_g + R)C$. On en déduit $C = \frac{t_1 - t_0}{(R_g + R) \ln 10} = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ F}$.
- L'arche positive du créneau (régime permanent à E_1) visible sur l'oscillogramme s'étend sur 8 carreaux. On a donc au minimum $T/2 = 0,80 \text{ ms}$, d'où $f < 625 \text{ Hz}$.



Pour observer l'intensité, il faut observer la tension aux bornes de R avec l'oscilloscope. Mais cela nécessite de **déplacer la masse pour qu'elle soit sur la résistance**, tout en étant nécessairement en contact avec le générateur de tension, comme indiqué ci-contre.

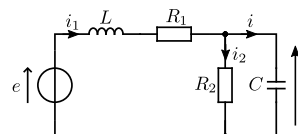
II.2. Utilisation d'un circuit du second ordre

11.



En régime stationnaire, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert, et la bobine à un simple fil (cf ci-contre). On a donc $i_\infty = 0$ et $u_\infty = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E_2 = 2,0 \text{ V}$ par la relation du pont diviseur de tension.

12.



Loi des nœuds : $i_1 = i_2 + i$, avec $i_2 = \frac{u}{R_2}$ et $i = C \frac{du}{dt}$.
En injectant ces relations dans la loi des mailles on obtient :

$$e = L \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + u$$

$$= \frac{L}{R_2} \dot{u} + LC \ddot{u} + \frac{R_1}{R_2} u + R_1 C \dot{u} + u$$

ce que l'on peut mettre sous la forme canonique

$$\ddot{u} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{u} + \omega_0^2 u = \frac{e}{LC} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{1 + \frac{R_1}{R_2}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{\omega_0}{\frac{1}{R_2 C} + \frac{R_1}{L}}$$

- Les zéros du régime transitoire sont séparés d'une durée $\frac{T}{2}$, et correspondent aux instants où $u(t) = u_\infty = 2,0 \text{ V}$. On obtient ainsi $T = 3 \times 0,20 \text{ ms} = 0,60 \text{ ms}$.
On mesure les 2 premiers maxima du régime transitoire, de valeur respective $u(t_m) - u_\infty = 2,0 \text{ V}$ et $u(t_m + T) - u_\infty = 0,5 \text{ V}$. D'où $\delta = \ln \left(\frac{2}{0,5} \right) = 1,4$;
- Lorsque l'on a $e(t) = E_2$ à partir de $t = 0$, la solution générale est la somme d'un régime transitoire solution de l'équation sans second membre associée, et du régime permanent stationnaire $u_p = u_\infty = E_2 \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)^{-1}$.
Il s'agit d'un régime transitoire pseudo-périodique puisqu'il y a des oscillations. Donc le discriminant de l'équation caractéristique $\Delta = 4\omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right)$ est négatif, donc $Q > \frac{1}{2}$ et il existe deux racines complexes conjuguées $r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega$ avec $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$. Cela conduit à une solution générale du type $u(t) = u_\infty + e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))$, où A et B sont des constantes d'intégration réelles dépendant des conditions initiales.
- D'après l'expression ci-dessus, la décroissance exponentielle est caractérisée par un temps caractéristique $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$.
Or le décrément logarithmique vérifie $\delta = \frac{T}{\tau}$ donc $\tau = \frac{T}{\delta} = 0,43 \text{ ms}$.
- Les deux équations recherchées proviennent du fait que la connaissance des paramètres T et δ permet de remonter aux deux paramètres ω_0 et Q ou (ω et τ) qui caractérisent totalement le système dans son régime transitoire. Les résistances étant connues, on peut en déduire les paramètres cachés L et C .
D'une part on a $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ ce qui d'après l'expression de ω_0 et Q peut se réécrire sous la forme

$$\frac{2}{\tau} = \frac{2\delta}{T} = \frac{1}{R_2 C} + \frac{R_1}{L} \quad (1)$$

D'autre part on a $\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right) = \omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}$ et $\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}$ donc

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} + \frac{1}{\tau^2} = \frac{4\pi^2 + \delta^2}{T^2} = \frac{1}{LC} \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right). \quad (2)$$

II.3. Réalisation d'un capacimètre électronique

17. a) La tension aux bornes du résistor R vaut $Ri = U_0 - V_-$ avec $V_- = V_+ = 0$ à cause de la masse. D'où

$$i = \frac{U_0}{R}, \text{ qui est indépendant de } R_{\text{ch}}.$$

b) La loi des nœuds en terme de potentiel écrite à l'entrée - de l'ALI s'écrit : $\frac{U_0 - V_-}{R} + \frac{V_S - V_-}{R_{\text{ch}}} = 0$. D'où

$$V_S = -\frac{R_{\text{ch}}}{R} U_0.$$

c) On demande $I_{\text{sat}} > |i_s| = |-i| = \frac{|U_0|}{R}$ donc $R > \frac{|U_0|}{I_{\text{sat}}} = 40 \Omega$.

Pour $R = 1,0 \text{ k}\Omega$, on demande $V_{\text{sat}} > |V_S| = \frac{R_{\text{ch}}}{R} |U_0|$ donc $R_{\text{ch}} < R \frac{V_{\text{sat}}}{|U_0|} = 15 \text{ k}\Omega$.

18. À l'instant initial on a $V_S = V_- = V_+ = 0$ donc la charge du condensateur du côté de la sortie de l'ALI est $q = (V_S - V_-)C = 0$.

19. On a $I_0 = -C \frac{dV_S}{dt}$, d'où après intégration $V_S(t) = -\frac{I_0}{C} t$ en prenant en compte qu'initialement $V_S(0) = 0$.

20. À l'arrêt du compteur à l'instant final t_f , on a $V_S(t_f) = -\frac{I_0}{C} t_f = -V_{\text{sat}}$ d'où $t_f = \frac{V_{\text{sat}} C}{I_0}$. Le nombre affiché par le compteur est alors $N = \frac{t_f}{T_H} = t_f f_H = \frac{V_{\text{sat}} f_H C}{I_0}$ ou $N = \frac{V_{\text{sat}} R f_H}{U_0} C$.

On souhaite que $\frac{N}{C} = 10^9 \text{ F}^{-1}$ donc $R = \frac{N}{C} \frac{U_0}{V_{\text{sat}} f_H} = 2,0 \text{ k}\Omega$.

Si $C = 1,0 \mu\text{F}$, alors $t_f = \frac{V_{\text{sat}}}{U_0} RC = 31 \text{ ms}$.