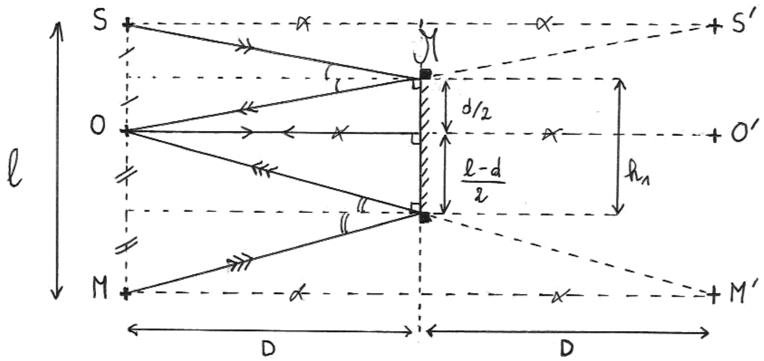
Optique géométrique

I. Placement d'un miroir plan

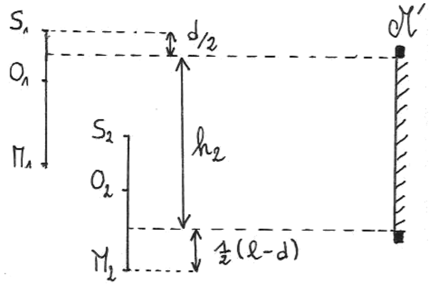
1. Par respect de la loi de Descartes de la réflexion, le bord supérieur du miroir doit être à mi-hauteur par rapport à l'œil (O) et le sommet du crâne (S). De même, le bord inférieur du miroir doit être à mi-hauteur par rapport à l'œil et le menton (M), cf le schema ci-dessous.



Cette disposition est indépendante de la distance D au miroir.

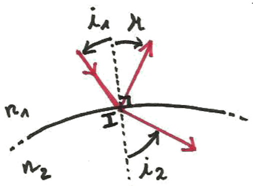
2. On en déduit $h_1 = \frac{d}{2} + \frac{\ell - d}{2}$ donc $\boxed{h_1 = \frac{\ell}{2}} = \underline{12,5\,\text{cm}}$ et $H_1 = L_1 - \ell + \frac{1}{2}(\ell - d)$ soit $\boxed{H_1 = L_1 - \frac{1}{2}(\ell + d)} = \underline{1,67\,\text{m}}$.

3. On modifie la position du bas du miroir pour s'adapter à la deuxième personne, $\boxed{H_2 = L_2 - \frac{1}{2}(\ell + d)} = \underline{1,45\,\text{m}}$, mais pas celle du haut qui est toujours à $L_1 - \frac{d}{2}$.
Le miroir a donc maintenant une hauteur $\boxed{h_2 = L_1 - L_2 + \frac{\ell}{2}} = \underline{35,5\,\text{cm}}$.



II. Fabrication d'un double prisme

1.



Lois de Snell-Descartes, pour un rayon incident en I sur un dioptre n_1/n_2 :

— Les rayons *réfléchi* et *réfracté* sont dans le *plan d'incidence*, formé par le rayon *incident* et la normale au point d'incidence ;

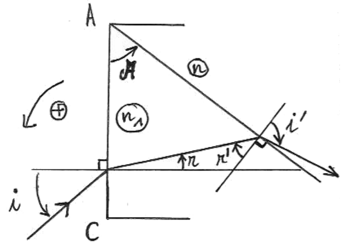
— l'angle du rayon réfléchi vérifie : $\boxed{r = -i_1}$;

— l'angle du rayon réfracté vérifie : $\boxed{n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2}$.

2. Le cône lumineux dans la lame après réfraction par la face AC a une ouverture maximale qui correspond à l'angle de réfraction limite, donc un angle au sommet $\boxed{\alpha_i = 2 \arcsin\left(\frac{1}{n_i}\right)}$. On obtient $\underline{\alpha_1 = 74,2\,°}$ ou $\underline{\alpha_2 = 84,6\,°}$.

3. Si on choisit n_2, il y aura forcément réfraction le long de AD car $n_2 < n$. Pour se donner **la possibilité d'une réflexion totale il faut choisir n_1 car $n_1 > n$.**

4.



Notons respectivement r et r' les angles du rayon dans le milieu d'indice n_1 par rapport à la normale du dioptre AC d'une part et AD d'autre part (cf schéma ci-contre), et i' l'angle du rayon réfracté à travers AD s'il existe. En écrivant que la somme des angle d'un triangle vaut π, on obtient $\pi = \mathcal{A} + \frac{\pi}{2} - r + \frac{\pi}{2} + r'$ d'où $r' = r - \mathcal{A}$. On voit donc que si i augmente, alors r aussi et donc r' diminue en valeur absolue (car $r' < 0$ ici), ce qui risque de permettre la réfraction à travers AD à partir d'une valeur limite r'_m telle que $i' = -\frac{\pi}{2}$.

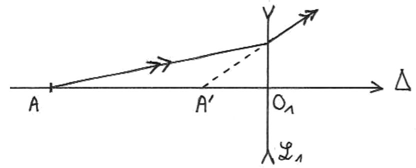
On en déduit qu'il ne faut pas dépasser l'incidence $i_{\max}$ telle que $\sin i_{\max} = n_1 \sin r_m$ avec $r_m = r'_m + \mathcal{A}$ et $n_1 \sin r'_m = n \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -n$. En utilisant ces trois relations, on obtient que l'angle du prisme doit vérifier $\boxed{\mathcal{A} = r_m - r'_m = \arcsin\left(\frac{\sin i_{\max}}{n_1}\right) + \arcsin\left(\frac{n}{n_1}\right)} = \underline{71,6°}$.

5. L'incidence i est minorée par le fait que les rayons doivent atteindre la face AD, donc on doit avoir $|r'| = -r' \le \frac{\pi}{2}$, d'où $r = \mathcal{A} - |r'| \ge \mathcal{A} - \frac{\pi}{2}$, d'où finalement $\boxed{i \ge i_{\min} = \arcsin\left(-n_1 \cos\mathcal{A}\right)} = \underline{-31,5°}$.

III. Objectif de photocopieur

1. Les conditions de Gauss sont définies pour ces systèmes centrés. Elles sont telles que l'on se limite à des rayons dits *paraxiaux*, c'est-à-dire **peu inclinés par rapport à l'axe optique**, et dont les points d'incidence sur les différents dioptres ou miroirs sont **proches de l'axe optique**.
Dans ces conditions, les systèmes centrés sont alors **approximativement stigmatiques et aplanétiques**.

2.



Soit A' l'image de A par la lentille $\mathcal{L}_1$ seule. Sa position s'obtient par l'intersection d'un rayon émergent quelconque issu de A et de l'axe optique, qui est un rayon particulier non dévié. Comme l'indique le schéma ci-contre, le fait que A soit en avant de $\mathcal{L}_1$ (objet réel) et que celle-ci soit divergente (donc le rayon s'écarte encore plus de l'axe optique), implique que A' est aussi en avant de $\mathcal{L}_1$. **On ne peut donc former une image sur le récepteur.**

Par le calcul, la relation de conjugaison de Descartes donne : $\frac{1}{\overline{O_1A'}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f'_1}$ d'où $\boxed{\overline{O_1A'} = \left(\frac{1}{f'_1} + \frac{1}{\overline{O_1A}}\right)^{-1} < 0}$, ce qui confirme que A' est en avant de $\mathcal{L}_1$.

3. a) Si $\mathcal{L}'$ est aussi divergente, elle va former une image intermédiaire A_1 de A qui sera à sa gauche d'après le raisonnement de la question précédente, et qui va donc former un nouvel objet à gauche de $\mathcal{L}_1$. On est donc ramené à la situation précédente, aucune image ne peut être projetée sur le récepteur. **La lentille $\mathcal{L}'$ doit donc être convergente.**

b) D'après la relation de conjugaison de Descartes, on obtient

- d'une part $f' = \left(\frac{1}{\overline{O'A_1}} - \frac{1}{\overline{O'A}}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{D - 2d + \overline{O_1A_1}} + \frac{1}{d}\right)^{-1}$;

- et d'autre part $\overline{O_1A_1} = \left(\frac{1}{\overline{O_1A'}} - \frac{1}{f_1'}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{f_1'}\right)^{-1}$.

Ceci conduit à $\boxed{f' = \left(\left(D - 2d + \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{f_1'}\right)^{-1}\right)^{-1} + \frac{1}{d}\right)^{-1}} = \underline{57\,\text{mm}}$.

c) Considérons un autre point objet B situé en dehors de l'axe optique Δ, de telle sorte que l'objet $\overrightarrow{AB}$ est transverse. On note de façon analogue $A \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} A_1 \overset{\mathcal{L}_1}{\mapsto} A'$. Le grandissement total est le produit des grandissements individuels apportés par chaque lentille car $\gamma_1 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}}\,\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}}$. D'après la relation de Descartes, et en réutilisant l'expression ci-dessus pour $\overline{O_1A_1}$, on a donc

$$\gamma_1 = \frac{\overline{O_1A'}}{\overline{O_1A_1}}\,\frac{\overline{O'A_1}}{\overline{O'A}} = \frac{\overline{O_1A'}}{\overline{O'A}}\,\frac{\overline{O'A_1}}{\overline{O_1A_1}} = (-1).\left(\frac{\overline{O'O_1}}{\overline{O_1A_1}} + 1\right) \quad \text{d'où} \quad \boxed{\gamma_1 = -1 - (D-2d)\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{f_1'}\right)} = \underline{-1,4}\,.$$

Si les longueurs sont multipliées par γ_1, les surfaces le sont par $\underline{(\gamma_1)^2 = 2,0}$, donc il s'agit d'**un tirage au format A3**.

4. Deux lentilles minces accolées forment une lentille mince équivalente de vergence la somme des vergences : $\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_2'} + \frac{1}{f_3'}$, donc $\boxed{f_3' = \left(\frac{1}{f'} - \frac{1}{f_2'}\right)^{-1}} = \underline{35\,\text{mm}}$. $\mathcal{L}_3$ est donc **convergente**.

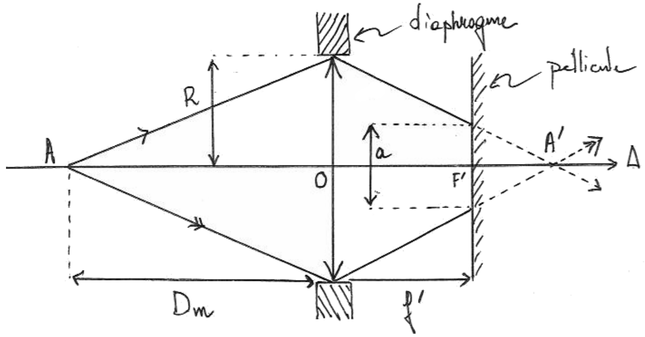
5. Lorsque la lentille $\mathcal{L}_3$ est accolée à $\mathcal{L}_1$, on se retrouve dans la situation analogue à la précédente du point-de-vue géométrique, à condition d'inverser le sens de propagation de la lumière, ce qui est possible en vertu du **principe de retour inverse**. Ainsi, en considérant que A' sur le récepteur est l'objet, il est alors conjugué avec le point image A sur le document. Le grandissement serait alors le même, c'est-à-dire γ_1. Comme la lumière va toujours de A vers A' le grandissement est donc finalement inversé : $\boxed{\gamma_2 = \frac{1}{\gamma_1}} = \underline{-0,71}$. Ceci conduit à un rapport $\underline{(\gamma_2)^2 = 0,51}$ sur les surfaces, donc **un tirage au format A5**.

IV. Appareil photographique

1. a) L'objet étant situé à une distance de l'ordre de 50000 fois la distance focale, on peut le considérer à l'infini, et donc l'image (qui est sur la pellicule puisqu'il y a eu mise-au-point) est dans le plan focal, à la distance $\underline{f' = 38\,\text{mm}}$. **SCHEMA**

La hauteur de l'image vérifie la relation du grandissement de Descartes : $\boxed{h' = f'\,\frac{h}{D}} = \underline{6,5\,\text{mm}}$.

b) Un objet ponctuel A à distance finie donnera une image A' située en arrière de la pellicule, et donc une tache sur la pellicule. Cette tache paraîtra toutefois nette si son diamètre est inférieur au diamètre a d'un grain. Son diamètre dépend de celui de l'ouverture, comme indiqué dans le schéma ci-dessous.



D'après ce critère, on a par le théorème de Thalès $\overline{OA'} = \frac{2R}{a}\,\overline{F'A'}$. Les relations de conjugaison de Descartes et de Newton permettent de traduire cette condition sur l'objet A tel que $\overline{OA} = -D_m$:

$$\left(\frac{1}{f'} + \frac{1}{\overline{OA}}\right)^{-1} = \frac{2R}{a}\,\frac{-f'^2}{\overline{FA}} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{f'} + \frac{1}{\overline{OA}}\right) = -\frac{a}{2R}\,\frac{\overline{FA}}{f'^2} = -\frac{a}{2R}\left(\frac{1}{f'} + \frac{\overline{OA}}{f'^2}\right)$$

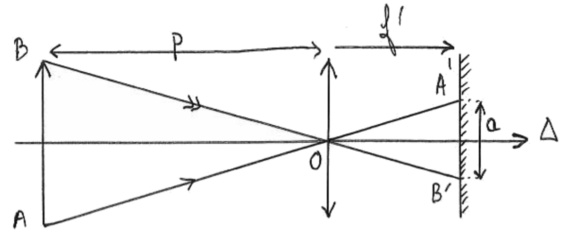
$$\Leftrightarrow \quad \frac{f' + \overline{OA}}{f'\,\overline{OA}} = -\frac{a}{2Rf'^2}\,(f' + \overline{OA}) \quad \Leftrightarrow \quad \overline{OA} = -\frac{2R}{a}\,f' \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{D_m = \frac{f'^2}{aN}}.$$

Dans les calculs ci-dessus, la première inversion et la simplification par $f' + \overline{OA}$ sont valables car on a nécessairement $\overline{OA} \neq -f'$ (car sinon l'image serait à l'infini).

REMARQUE : *On retrouve bien le résultat établit dans l'approche documentaire pour la distance hyperfocale. Notons aussi que si on ne simplifie pas par $f' + \overline{OA}$ ci-dessus, on obtient un trinôme du second degré avec l'autre solution $D_m = f'$, qui correspond précisément au cas $f' + \overline{OA} = 0$ impossible. On peut donc l'éliminer.*

Pour les valeurs extrêmes de N on obtient $\underline{D_m \in [4,4;24]\,\text{m}}$. Par conséquent on aura une bonne profondeur de champ dans tous les cas, c'est-à-dire que tout le paysage sera net sauf le tout premier plan.

2. a) De nouveau l'objet peut être considéré à l'infini (à 1‰près) , donc l'image et la pellicule à la distance f' de la lentille. Pendant le temps de pose τ, un point du coureur passe de la position A à la position B, donc son image passe de A' à B', cf ci-dessous.



D'après la relation de grandissement de Descartes, on a $A'B' = \frac{f'}{p}\,AB$. Or on a $AB = V\tau$, et pour que l'image ne soit pas floue il faut que $A'B' \leq a$. On obtient donc un temps de pose maximal $\boxed{\tau \leq \tau_m = \frac{pa}{f'V}} = \underline{2,4\,\text{ms}}$.

b) L'objectif étant quasiment mis-au-point sur l'infini, on peut ré-utiliser la distance hyperfocale calculée en **1.b)**, ce qui donne une plage de vision nette de profondeur $p - D_m$ entre le coureur et l'appareil. En arrière du coureur, on peut considérer en première approximation que la plage de vision nette est du même ordre. On a donc approximativement une profondeur de champ de $\mathcal{P}_c \approx 2(p - D_m)$ soit $\boxed{\mathcal{P}_c \approx 2\left(p - \frac{f'^2}{aN}\right)} = \underline{12\,\text{m}}$.

c) Un mouvement rapide impose un temps de pose court pour la netteté. Mais un temps de pose court implique une ouverture grande pour compenser la perte d'exposition. La profondeur de champ est d'autant plus faible que l'ouverture est grande. Donc **la photographie d'un mouvement rapide est naturellement associée à une faible profondeur de champ**.