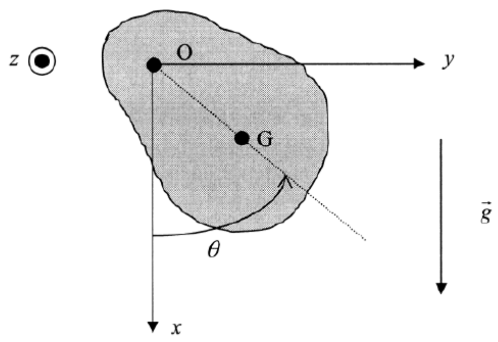
THERMODYNAMIQUE

I. Variations d'intensité du champ de pesanteur

Plusieurs causes contribuent aux variations spatiales du champ de pesanteur terrestre : la rotation propre terrestre (qui induit une force dite « centrifuge »), l'inégale valeur des rayons de la Terre aux pôles et à l'équateur, les inhomogénéités de composition et de topographie de la Terre. On cherche une méthode expérimentale pour mesurer localement l'intensité de ce champ à la surface de la Terre, noté $\overrightarrow{g}$. Nous allons pour cela envisager tout à tour deux types différents de pendules.

Pendule sans ressort de rappel

Un pendule est composé par un solide de masse m, de centre d'inertie G, mobile autour d'un axe horizontal (Oz) et de moment d'inertie J par rapport à l'axe (Oz). Il peut effectuer des mouvements de rotation dans le plan vertical (Oxy) autour de l'axe (Oz). La position du pendule est repérée par l'angle θ entre verticale descendante et la droite (OG). On notera a la distance OG. L'étude sera menée dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ considéré galiléen. Les frottements au niveau de l'axe de rotation et les frottements de l'air seront négligés. Le pendule ainsi décrit se trouve dans le champ de pesanteur terrestre caractérisé par le vecteur $\overrightarrow{g}$ tel que $\overrightarrow{g} = g\overrightarrow{u_x}$ où $\overrightarrow{u_x}$ désigne un vecteur unitaire de l'axe (Ox).

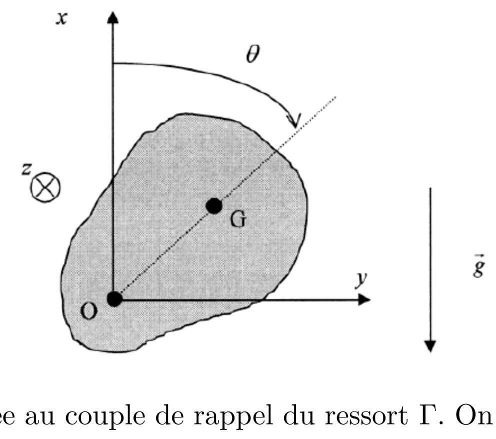


1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ au cours du temps.
En déduire l'expression la période T des petites oscillations du pendule autour de la position d'équilibre stable $\theta = 0$, en fonction de J, m, a et g.

2. On souhaite étudier l'influence d'une variation d'intensité Δg du champ de pesanteur sur la période du pendule. Pour cela, on définit la sensibilité s du pendule comme le rapport $s = \frac{\Delta T}{T}$ où ΔT représente une variation infiniment petite de la période du pendule engendrée par une variation infiniment petite Δg du champ de pesanteur.
Exprimer la différentielle $\mathrm{d}T$ due à une variation infinitésimale $\mathrm{d}g$ de l'intensité du champ de pesanteur. En déduire l'expression de la sensibilité s en fonction de Δg et g.

Pendule avec ressort spiral de rappel

Le pendule précédent est maintenant soumis à l'action d'un ressort spiral (non représenté sur la figure) qui exerce, par rapport à l'axe (Oz), un coupe de rappel $\Gamma = -K\theta$ où K est une constante positive. La position du pendule est repérée par l'angle θ entre la verticale ascendante et la droite (OG). (Attention aux nouvelles orientations des axes : dans cette partie $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{u_x}$.)



3. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle $E_{p,r}$ associée au couple de rappel du ressort Γ. On choisira la référence d'énergie potentielle telle que $E_{p,r} = 0$ pour $\theta = 0$.

4. Exprimer l'énergie potentielle totale E_p du pendule, en gardant comme référence pour E_p la position $\theta = 0$.

5. En déduire une équation permettant de connaître la ou les positions d'équilibre du système. Discuter graphiquement le nombre de ces positions d'équilibre. Montrer que $\theta = 0$ est solution.
6. Établir la condition pour que cette position soit une position d'équilibre stable. Cette condition sera supposée réalisée dans toute la suite.
7. Exprimer l'énergie mécanique totale E_m du pendule. En déduire une équation différentielle du mouvement vérifiée par l'angle θ.
8. En considérant que θ reste petit (on reste au voisinage de $\theta = 0$), établir l'expression de la période T' des petites oscillations du pendule autour de la position $\theta = 0$.
9. On souhaite étudier la sensibilité s' de ce pendule à une variation Δg du champ de pesanteur. On définit, tout comme précédemment, s' par le rapport $s' = \frac{\Delta T'}{T'}$. Déterminer l'expression de la sensibilité s' en fonction de Δg, K, g, a, et m.
10. Montrer que l'on peut choisir la constant K de telle sorte que le pendule avec ressort spiral de rappel soit plus sensible que le premier et permette ainsi de détecter des variations plus faibles du champ de pesanteur. Exprimer cette condition sous forme d'une relation entre K, g, m et a.

II. Impact mécanique de la pluie sur un pare-brise d'avion

Notations et données :

Accélération de la pesanteur : $g = 9,81\,\mathrm{m.s^{-2}}$
Masse volumique de l'air : $\rho_a = 1,20\,\mathrm{kg.m^{-3}}$
Masse volumique de l'eau : $\rho_e = 998\,\mathrm{kg.m^{-3}}$

Nous nous proposons d'étudier l'effet mécanique de la pluie sur un pare-brise. Une goutte est assimilée à une sphère de rayon r. Sa vitesse, par rapport au référentiel terrestre $\mathcal{R}_0 = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ considéré galiléen, est notée $\vec{u} = u\,\vec{e}_x$ où $\vec{e}_x = \frac{\vec{g}}{g}$. Dans tout le problème on considèrera qu'en raison des frottements de l'air, la vitesse des gouttes est constante.

II.1. Effort mécanique

Nous souhaitons estimer la force qu'exerce la pluie sur le pare-brise d'un avion. Le pare-brise est modélisé par une surface S rectangulaire de hauteur $h = 0,5\,\mathrm{m}$ et de largeur $\ell = 1\,\mathrm{m}$, inclinée d'un angle $\alpha = 45°$ sur la direction horizontale (figure ci-contre). Nous considérerons que, lorsque qu'une goutte heurte le pare-brise, sa quantité de mouvement, relativement à un repère lié à l'avion, s'annule.

L'intensité I caractérisant une précipitation est mesurée par la hauteur d'eau recueillie au sol, par unité de temps. Pour les applications numériques, nous adopterons $I = 300\,\mathrm{mm.h^{-1}}$ (pluie extrême, sur une courte durée).

Dans cette sous-partie, nous supposons que les gouttes de pluie ont toutes le même rayon $r_0 = 0,5\,\mathrm{mm}$. Nous notons N_0 leur nombre par unité de volume (d'atmosphère).

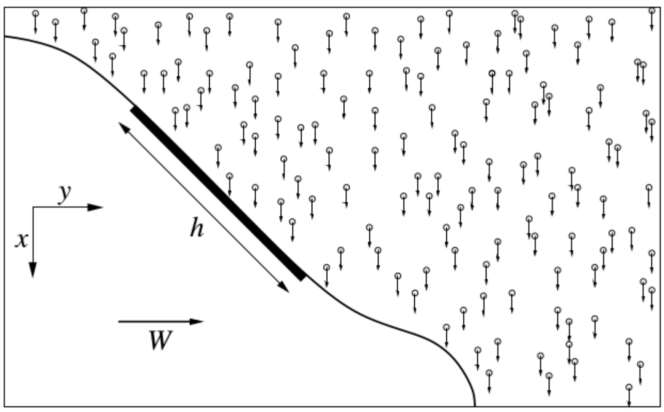


Schéma de profil du nez d'un avion progressant, sous la pluie, à la vitesse $\vec{W} = W\,\vec{e}_y$. Le pare-brise apparaît en trait plein épais.

1. **a)** Sur la base de sa propre expérience, proposer un ordre de grandeur de la vitesse de chute u d'une goutte d'eau de pluie.

   b) Exprimer N_0 en fonction de u, r_0 et de l'intensité I.

c) Calculer la valeur numérique de N_0.

d) En déduire la distance moyenne d_0 entre les gouttes de pluie.

2. Nous considérons d'abord le cas d'un avion immobile sur l'aérodrome.

a) Représenter, sur un schéma, le domaine de précipitation (atmosphère et gouttes) intercepté par le pare-brise entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$.

b) Exprimer la force $\vec{F_0}$ exercée par la pluie sur le pare-brise. Vérifier que son module s'écrit sous la forme :

$$F_0 = (k \cos \alpha) S \rho_e u^2 \,.$$

Expliciter la dépendance du facteur k avec N_0 et r_0. Préciser sa dimension.

c) Calculer l'intensité de cette force. Commenter.

3. Nous considérons maintenant un avion volant à la vitesse $\overrightarrow{W} = W\,\vec{e}_y$.

a) Donner un ordre de grandeur de W pour un avion de ligne.

b) On rappelle que la loi de composition des mouvements pour les changements de référentiel implique que la vitesse des gouttes perçue dans le référentiel de l'avion s'écrit :

$$\vec{u}\,' = \vec{u} - \overrightarrow{W} \,.$$

En se plaçant dans le référentiel lié à l'avion, représenter, sur un schéma, le domaine de précipitation (atmosphère et gouttes) intercepté par le pare-brise, entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$. On considérera les ordres de grandeur en jeu.

c) En déduire l'expression de la force $\vec{F}$ exercée par la pluie sur le pare-brise.

d) Évaluer l'ordre de grandeur de la force correspondante.

II.2. Distribution du rayon des gouttes

En réalité, les gouttes de pluie n'ont pas toutes la même taille. Le nombre $\mathrm{d}N$ de gouttes, par unité de volume (atmosphérique), dont le rayon est compris entre r et $r + \mathrm{d}r$ suit sensiblement la loi de Marshall-Palmer :

$$\mathrm{d}N = n(r)\,\mathrm{d}r = n_0\, e^{-\frac{r}{\lambda}}\,\mathrm{d}r \,, \tag{1}$$

où n_0 et λ sont les paramètres (constants) de la distribution.
La différentielle $\mathrm{d}P(r) = \frac{\mathrm{d}N}{N_0}$, où N_0 représente le nombre total de gouttes par unité de volume, s'interprète comme la probabilité élémentaire que le rayon d'une goutte appartienne à l'intervalle $[r, r + \mathrm{d}r]$.

4. Quelques propriétés de la distribution de rayon.

a) Exprimer N_0 en fonction de n_0 et λ.

b) Exprimer, sous la forme d'une intégrale sur $n(r)$, les probabilités $\mathcal{P}(r \leq \lambda)$ et $\mathcal{P}(r > \lambda)$ que le rayon d'une goutte choisie aléatoirement soit, respectivement, inférieur ou supérieur à λ. Calculer ces probabilités et les comparer. Interpréter ce résultat.

c) Exprimer le rayon moyen $< r >$ des gouttes. Mettre ce résultat en perspective du précédent.

5. Nous définissons la grandeur différentielle suivante :

$$\mathrm{d}M(r) = \rho_e \frac{4\pi}{3} r^3\, n(r)\,\mathrm{d}r \,.$$

a) Donner sa signification physique.

b) Esquisser l'allure graphique de la grandeur $\mu(r) = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}r}$.

c) Préciser le rayon des gouttes dont la contribution à la masse totale (par unité de volume) est la plus importante.

d) Exprimer la masse moyenne $< m >$ des gouttes.

e) Commenter la comparaison de $< m >$ à la masse d'une goutte de rayon $< r >$.

6. L'expression de la force obtenue à la question **3.c)** s'écrit sous la forme :

$$\vec{F} = -Q\, N_0\, r_0^3 \vec{e}_y\,,$$

où le facteur Q est indépendant de N_0 et r_0.

a) Exprimer la force $\vec{F}_D$ exercée par la pluie sur le pare-brise, pour la distribution (1).

b) Exprimer le rapport $\varphi = |\vec{F}_D|/|\vec{F}|$ pour un nombre total N_0 de gouttes par unité de volume fixé et pour $< r >= r_0$.

c) Conclure sur l'effet mécanique de la pluie. Le comparer à celui correspondant au maintien en pression de l'habitacle de l'avion.

7. La figure ci-dessous présente des relevés météorologiques de la distribution du rayon des gouttes.

a) Comparer ces données à leur modélisation par la loi de Marshall-Palmer.

b) Pour le plus faible régime de précipitation, que l'on désignera en justifiant sa sélection, déduire de la figure ci-dessous les valeurs (approximatives) de n_0 et de λ.

c) Dans ce même régime, donner la valeur numérique du rayon moyen $< r >$ et celle du nombre total N_0 de gouttes par unité de volume. Commenter ce dernier résultat.

d) Parmi les relations exprimant le nombre total de gouttes N_0 par unité de volume, leur rayon moyen $< r >$ et la force $\vec{F}$ exercée sur le pare-brise, obtenues en s'appuyant sur la loi de Marshall-Palmer, quelle est celle qui souffre le moins de l'écart de cette loi aux relevés météorologiques ? Cette réponse doit être argumentée.