

ONDES ET MÉCANIQUE

I. Mouvement sur un hyperboloïde de révolution

1. Notons \mathcal{R} le référentiel terrestre. On a $\frac{d\vec{u}_r}{dt}\Big|_{\mathcal{R}} = \dot{\theta} \vec{u}_\theta$ et $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}\Big|_{\mathcal{R}} = -\dot{\theta} \vec{u}_r$, d'où $\boxed{\vec{O}\vec{M} = r \vec{u}_r + z \vec{u}_z}$,

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r\dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z} \text{ et } \boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{u}_\theta + \ddot{z} \vec{u}_z}.$$

2. a) $\boxed{\vec{F} = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}}$.

b) Le travail élémentaire vérifie

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{M}_1 M_2 = F \vec{u} \cdot \left(dr \vec{u} + r \frac{d\vec{u}}{dt}\Big|_{\mathcal{R}} \right) = F \cdot dr = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot dr = -dE_p \text{ avec } \boxed{E_p = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r}}$$

une fonction de l'espace uniquement. Donc la force gravitationnelle est **conservative**.

3. a) La force de réaction de la surface \vec{R} est normale car on néglige les frottements, donc elle ne travaille pas. La pesanteur est conservative et dérive de l'énergie potentielle $E_p = mgz$. Donc l'énergie mécanique est constante dans \mathcal{R} , et vaut $\boxed{E_m = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + mgz}$.

b) Tant que la bille reste en contact avec la surface hyperboloïde, on a donc $\boxed{E_p = -\frac{mgk}{r}}$ avec $mgk > 0$. Ceci correspond à l'énergie potentielle d'une particule de masse m subissant l'attraction gravitationnelle d'une masse M si on choisit $\boxed{k = \frac{\mathcal{G}M}{g}}$.

4. a)

$$\vec{\sigma}(O) = \vec{O}\vec{M} \wedge m\vec{v} = m(r\vec{u}_r + z\vec{u}_z) \wedge (\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z) \Rightarrow \boxed{\vec{\sigma}(O) = m(-zr\dot{\theta} \vec{u}_r + (z\dot{r} - \dot{z}r)\vec{u}_\theta + r^2\dot{\theta}\vec{u}_z)}$$

On en déduit $\boxed{\sigma^{Oz} = mr^2\dot{\theta}}$.

b) On applique le théorème de moment cinétique dans \mathcal{R} galiléen par rapport à l'axe fixe Oz . La symétrie de révolution implique que la réaction normale est dans le plan $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$. Donc le moment $\vec{M}_{\vec{R}}(0) = \vec{O}\vec{M} \wedge \vec{R}$ est orienté selon \vec{u}_θ . Par conséquent $\mathcal{M}_{\vec{R}}^{Oz} = 0$. De plus $\mathcal{M}_{m\vec{g}}^{Oz} = 0$ car \vec{g} est dirigé selon \vec{u}_z .

On en déduit $\boxed{\sigma^{Oz} = \text{constante} = C}$.

La vitesse aréolaire $\frac{dA}{dt} = \frac{C}{2}$ est donc constante : le rayon-vecteur balaie des aires égales pendant des durées égales.

5. On a $\vec{v}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 = \dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2} + \frac{k^2}{r^4} \dot{r}^2$, d'où $E_m = \frac{1}{2} m \alpha(r) \dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}(r)$ avec $\boxed{\alpha(r) = 1 + \frac{k^2}{r^4}}$ et

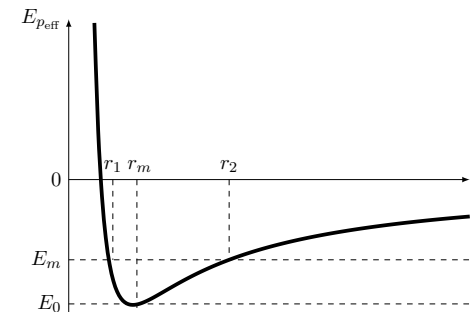
$$\boxed{E_{p,\text{eff}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{mgk}{r}}$$

6.

$$\frac{dE_{p,\text{eff}}}{dr} = -\frac{mC^2}{r^3} + \frac{mgk}{r^2} \geq 0 \Leftrightarrow r \geq \boxed{r_m = \frac{C^2}{gk}}$$

La fonction admet donc un minimum en r_m qui

vaut $\boxed{E_0 = -\frac{mg^2 k^2}{2C^2}}$.



7. Du point de vue de la variable r , le système est analogue à un système à un degré de liberté r ayant pour énergie potentielle $E_{p,\text{eff}}(r)$.

$$E_m = \text{constante} = \frac{1}{2} m \alpha(r) \dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}(r) \Rightarrow E_m \geq E_{p,\text{eff}}(r).$$

Si $E_m \geq 0$ alors le mouvement n'est pas borné et $r \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty$ est possible. Un tel état est dit **libre** ou de **diffusion**.

Si $E_m < 0$ le mouvement est borné entre des distances r_1 et r_2 vérifiant $E_m = E_{p,\text{eff}}(r_{1,2})$. La bille est dans un **état lié**. **Son mouvement est inscrit entre deux cercles de centre O et de rayons r_1 (et de cote z_1) et r_2 (et de cote z_2).**

8. a) On a $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ donc $dt = \frac{dr}{\dot{r}}$ et $\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m\alpha(r)} (E_m - E_{p,\text{eff}}(r))}$ pendant un aller de r_1 à r_2 , qui dure une demi-période. En intégrant entre les instants 0 et $\frac{T}{2}$ on obtient $\boxed{T = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m\alpha(r)} (E_m - E_{p,\text{eff}}(r))}}$.

b) On développe l'énergie potentielle effective à l'ordre 2 en r_m pour obtenir l'approximation harmonique :

$$E_{p,\text{eff}}(r) = E_0 + \frac{1}{2} \kappa (r - r_m)^2 + o((r - r_m)^2) \text{ avec } \kappa = \frac{d^2 E_{p,\text{eff}}(r)}{dr^2}(r_m) = \frac{m(gk)^4}{C^6}.$$

Il faut aussi développer la masse effective $m\alpha(r)$ au voisinage de r_m . Ainsi l'énergie cinétique effective s'écrit :

$$\frac{1}{2} m \alpha(r) \dot{r}^2 = \frac{1}{2} m_{\text{eff}} (1 + O(r - r_m)) \dot{r}^2 \text{ avec } m_{\text{eff}} = m \alpha(r_m) = m \left(1 + \frac{g^4 k^6}{C^8} \right),$$

d'où la pulsation propre des petites oscillations au voisinage de r_m , $\boxed{\omega_0 = \frac{g^2 k^2}{C^3} \left(1 + \frac{g^4 k^6}{C^8} \right)^{-\frac{1}{2}}}$ et la

période propre associée $\boxed{T_0 = \frac{2\pi C^3}{g^2 k^2} \left(1 + \frac{g^4 k^6}{C^8} \right)^{\frac{1}{2}}}$.

9. La vitesse initiale étant orthoradiale, $\dot{r}(0) = \dot{z}(0) = 0$ et $\vec{v}(0) = v_0 \vec{u}_\theta = \frac{C}{r_0} \vec{u}_\theta$. Donc $\boxed{C = r_0 v_0}$.

Le mouvement est circulaire si r est constant, donc si $r_1 = r_2 = r_m = r_0$, donc si $r_0 = \frac{C^2}{gk} = \frac{r_0^2 v_0^2}{gk}$, c'est-à-dire si $\boxed{r_0 v_0^2 = gk}$.

Remarque : On retrouve alors bien que $E_m = E_0 = -\frac{mgk}{2r_0}$, qui est la relation caractéristique des états liés du problème newtonien.

II. Le millenium bridge (d'après Mines-Ponts MP 2016)

1. Le théorème de la résultante cinétique dans le référentiel \mathcal{R} terrestre supposé galiléen s'écrit pour la masse m en mouvement rectiligne vertical :

$$m\ddot{x}\vec{u}_x = -mg\vec{u}_x - \alpha\dot{x}\vec{u}_x - k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u}_x \quad \text{avec} \quad \ell = x.$$

Au repos, ceci conduit à $0 = -g - k(\bar{x} - \ell_0) \Leftrightarrow x = \bar{x} = \ell_0 + \frac{mg}{k}$. Ceci permet de ré-écrire l'équation projetée avec le changement de variable $X = x - \bar{x}$ ayant pour origine la position de repos :

$$m\ddot{X} = -mg - \alpha\dot{X} - k(X + \bar{x} - \ell_0) = -\alpha\dot{X} - kX \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2X = 0,$$

où $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ représente la **pulsation propre** de l'oscillateur, et $\xi = \frac{\alpha}{2\sqrt{km}}$ son **coefficient d'amortissement** (adimensionnalisé).

2. On cherche des solutions de la forme e^{rt} , ce qui conduit à l'équation caractéristique $r^2 + 2\xi\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$ de discriminant réduit $\Delta = \omega_0^2(\xi^2 - 1)$. Les racines sont imaginaires pures si $\xi < 1$ donc les régimes libres sont **oscillatoires**.

Si $\xi = 0$, le régime est harmonique, et $X(t) = X_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{V_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$ ce qui vérifie bien les conditions initiales.

Si $0 < \xi < 1$, alors $X(t) = e^{-\xi\omega_0 t} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))$ avec $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$. L'application des conditions initiales conduit à $A = X_0$ et $B = \frac{1}{\omega} (V_0 + \xi\omega_0 X_0)$.

En présence d'un vent de force $\beta\dot{X}$, on obtient un nouveau coefficient $\xi' = \frac{\alpha - \beta}{2\sqrt{km}}$ qui peut être négatif, d'où alors une **amplification** de l'oscillateur conduisant à un **comportement instable**.

3. Le principe fondamental de la dynamique projeté sur Ox devient

$$\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2X = -\frac{F_0}{m} - \frac{F_1 m}{m} \cos(2\pi ft) \Leftrightarrow \ddot{Y} + 2\xi\omega_0\dot{Y} + \omega_0^2Y = -\frac{F_1 m}{m} \cos(2\pi ft)$$

car $\dot{Y} = \dot{X}$ et $\ddot{Y} = \ddot{X}$. Passons en complexes en posant $\underline{E} = \frac{F_1 m}{m} e^{i\omega t}$ avec $\omega = 2\pi f$. On obtient

$$\underline{Y} (-\omega^2 + 2i\omega\xi\omega_0 + \omega_0^2) = -\underline{E} \Leftrightarrow \underline{H} = -\frac{1}{\omega_0^2} \frac{1}{1 + 2i\xi\Omega - \Omega^2}.$$

4. On a affaire à un passe-bas de gain $G(\Omega) = |\underline{H}| = (\omega_0^2 \sqrt{f(\Omega)})^{-1}$ avec $f(\Omega) = (1 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2$. Il présente un maximum si $f(\Omega)$ présente un minimum. Par dérivation on obtient que cette résonance existe en $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$ **seulement si** $\xi \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

À la résonance on a $G(\omega_r) = |\underline{H}|_{\max} = \frac{1}{\omega_0^2 2\xi \sqrt{1 - \xi^2}} \approx \frac{1}{\omega_0^2 2\xi}$ pour $\xi^2 \ll 1$. La résonance est donc d'autant plus intense que l'amortissement est faible.

5. La pulsation de résonance lue est $\omega_r = 12,2 \text{ rad.s}^{-1}$, et le gain vaut alors $\omega_0^2 |\underline{H}|_{\max} = 9,0 \text{ dB}$. On en déduit

$$\xi = \frac{1}{\omega_0^2 |\underline{H}|_{\max}} = \frac{1}{2 \times 10^{\frac{9,0}{20}}} = 0,18.$$

On en déduit la pulsation propre $\omega_0 = \frac{\omega_r}{\sqrt{1 - 2\xi^2}} = 12,6 \text{ rad.s}^{-1}$.

6. On a vu dans la question 4 que le déplacement de la structure devenait important au niveau de la fréquence de résonance (cf. l'introduction). Il faut éviter ce phénomène d'autant plus que cela peut aller jusqu'à la destruction.

7. D'après le **critère de Shannon**, la fréquence maximale théoriquement mesurable sur un spectre de signal numérique est la moitié de la fréquence d'échantillonnage f_e . On a donc $f_{\max} = \frac{f_e}{2} = \frac{N}{2t_{\max}} = 15 \text{ Hz}$. Le spectre visible est limité à 14 Hz donc il est correctement échantillonné (tout juste). Les pics équidistants sont positionnés sur les multiples entiers de la fréquence fondamentale $f = 2,0 \text{ Hz}$. Cette valeur est prévisible puisqu'un marcheur effectue à peu près 2 pas à chaque seconde.

8. La fréquence de résonance du pont était $f_r = \frac{\omega_r}{2\pi} = 2,0 \text{ Hz} \approx f$, donc **elle correspondait à la fréquence de la marche**. Ceci explique les oscillations importantes du pont. Le système d'« amortisseur » n'a pas amorti grand chose (-2 dB), mais a par contre **dédoublé la résonance** en créant une anti-résonance pour la fréquence de la marche (-8 dB cette fois). L'explication vient donc du couplage des deux oscillateurs : **le système ayant 2 degrés de liberté, il y a maintenant 2 modes propres d'oscillations libres, donc 2 pulsations de résonance**.

III. Microscopie à force atomique (d'après E3A MP 2016)

- En utilisant l'image grossie 3000 fois, on obtient pour la pointe : hauteur $20 \mu\text{m}$, base $15 \mu\text{m}$.
Pour le levier, on obtient approximativement $a \approx 50 \mu\text{m}$ et $e \approx 4 \mu\text{m}$.
Ces ordres de grandeur correspondent à des dimensions « micrométriques », comme indiqué dans le texte.
- $\times 1000$ et $\times 3000$ sont des indications de **grossissement commercial** du microscope électronique, c'est-à-dire le **rapport entre les diamètres angulaires** de l'image à travers le microscope (au P.R. de l'œil normal) d'une part et de l'objet (au P.P. de l'œil normal) d'autre part.
Un microscope optique est limité à des grossissements de l'ordre de 500 à 1000 .
- Le microscope optique traditionnel fonctionne à l'aide des **ondes lumineuses visibles, de longueur d'onde $\lambda \sim 0,5 \mu\text{m}$ du même ordre de grandeur que la taille de l'objet** à observer. La **diffraction** empêche donc les images de se former correctement (selon les lois de l'optique géométrique).

Système pointe-levier

- $[E] = \left[\frac{L^3 F_{\text{ext}}}{z a e^3} \right] = L^{-2} M L T^{-2}$ d'où $[E] = M L^{-1} T^{-2}$. C'est la dimension d'une **énergie volumique**, ou d'une **pression** (force par unité de surface).
- À l'équilibre, la force extérieure est compensée par une force qui vérifie $F = -F_{\text{ext}} = -k(\ell - \ell_0)$ avec $\ell_0 = 0, \ell = z$ et $k = \frac{E a e^3}{4 L^3}$.
- On obtient $k = 20 \text{ N.m}^{-1}$.
- Le théorème de la résultante cinétique dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen s'écrit selon \vec{e}_z : $m \ddot{z}_G = -kz - \alpha \dot{z} + F_{\text{ext}}$, où z_G représente la cote du centre de masse du système {levier+pointe}.
Remarque : En l'absence de données supplémentaires dans l'énoncé (qui laisse donc à désirer) on suppose que G se situe à l'extrémité du levier, de telle sorte que $z_G = z$... sinon il manque cette donnée!¹.
On en déduit

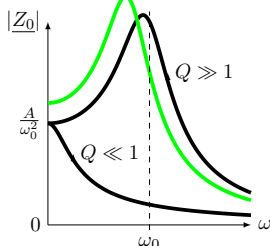
$$\ddot{z} + 2\gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = A \cos(\omega t) \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{\alpha}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad A = \frac{F_m}{m}.$$

- On peut définir le facteur de qualité par $\frac{\omega_0}{Q} = 2\gamma$, d'où $Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$.
- L'équation du mouvement ci-dessous est linéaire à coefficients constants avec second membre sinusoïdal donc elle peut être ré-écrite en complexes. Après simplification par $e^{j\omega t}$, on obtient :

$$Z_0 = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\gamma j\omega} \quad \text{et} \quad |Z_0| = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}.$$

Il s'agit d'un filtre passe-bas. Comportements asymptotiques :

- À basse fréquence, lorsque $\omega \ll \omega_0$, on a $Z_0 \approx \frac{A}{\omega_0^2}$.
- À haute fréquence, lorsque $\omega \gg \omega_0$, on a $Z_0 \sim -\frac{A}{\omega^2} \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0$.



Pour de grands facteurs de qualité, il existe une résonance d'autant plus aiguë que Q est grand, et pour une pulsation d'autant plus proche de la pulsation propre.

- En présence de la surface, on obtient $\ddot{z} + 2\gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{1}{m} (F_{\text{ext}} + F_{\text{int}}(z))$ donc

$$\ddot{z} + 2\gamma \dot{z} + \omega_0^2 z \approx \frac{F_m}{m} \cos(\omega t) + \frac{F_{\text{int}}(z_{\text{eq}})}{m} + \frac{1}{m} \frac{dF_{\text{int}}}{dz}(z_{\text{eq}}) (z - z_{\text{eq}}).$$

1. En réalité comme $z_G = \beta z$ avec $0 < \beta < 1$, on peut prendre $z_G = z$ à condition de remplacer la « vraie masse » m par une masse effective $m_{\text{eff}} = \beta m$.

- Cela se ré-écrit

$$\ddot{z} + 2\gamma \dot{z} + \Omega_0^2 z \approx \frac{F_m}{m} \cos(\omega t) + \frac{F_{\text{int}}(z_{\text{eq}})}{m} - \frac{1}{m} \frac{dF_{\text{int}}}{dz}(z_{\text{eq}}) z_{\text{eq}} \quad \text{avec} \quad \Omega_0 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{k} \frac{dF_{\text{int}}}{dz}(z_{\text{eq}})}.$$

- On a $d(z) = d_0 - z$ donc $\frac{dF_{\text{int}}}{dz}(z) = \frac{HR}{3(d_0 - z)^3}$.

- La variation relative de pulsation s'écrit $\frac{\Omega_0 - \omega_0}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{HR}{3k(d_0 - z_{\text{eq}})^3}} - 1 = -1,2 \times 10^{-6}$. On a donc $\Omega_0 < \omega_0$. L'écart se produit vers les basses fréquences.

- cf la courbe verte sur le graphe de la question 9. (car $\Omega_0 < \omega_0$).

Force d'interaction

- Pour une force conservative, le travail élémentaire vérifie : $\delta W = -dE_p$. Un travail moteur correspond donc à une diminution d'énergie potentielle. Or le déplacement se fait dans le sens de la force lorsque le travail est moteur, donc vers les d croissant pour $d < d_m$, et pour les d décroissant pour $d > d_m$. Ainsi, **la force est répulsive pour $d < d_m$, et attractive sinon**.
- Si le système est à l'équilibre, il est à une distance d_m de la surface car c'est le minimum d'énergie potentielle. On note alors E_0 son énergie minimale. La pointe pourra s'éloigner définitivement, ou d'une grande distance, si l'énergie est positive, donc si l'on apporte une énergie $-E_0$.