ONDES ET MÉCANIQUE

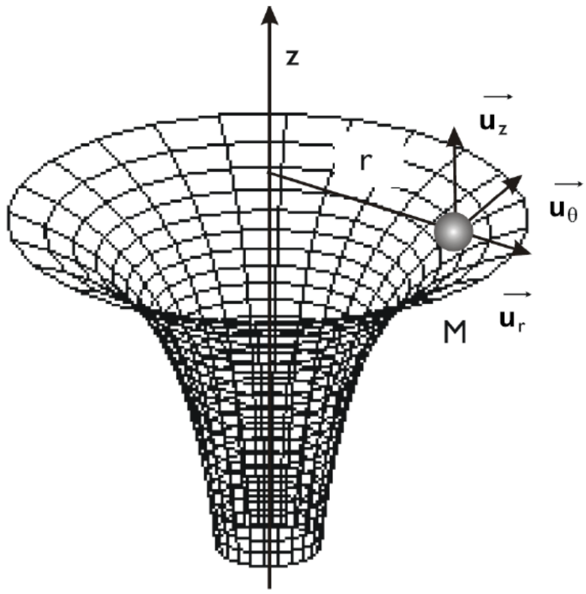
Ce devoir comporte 4 parties totalement indépendantes, à traiter sur des copies séparées.

CALCULATRICES AUTORISÉES

I. Mouvement sur un hyperboloïde de révolution

Pour rendre compte du mouvement d'une planète autour de son étoile, on peut par exemple étudier le mouvement d'un point matériel sur un hyperboloïde de révolution, appelé alors «orbitogramme». Le but de ce problème est d'étudier le mouvement d'un tel point.

On considère le référentiel terrestre galiléen associé au repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$. L'axe (Oz) est vertical ascendant. La position d'un point matériel M est définie par ses coordonnées cylindriques r (avec $r > 0$), θ et z. On notera respectivement $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ les vecteurs unitaires de la base cylindrique associée (cf. ci-contre).



Hyperboloïde de révolution sur lequel évolue la bille.

Préliminaires

1. Exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans la base cylindrique. Exprimer, dans cette même base, les vecteurs vitesse $\overrightarrow{v}(M)$ et accélération $\overrightarrow{a}(M)$.

2. **a)** Rappeler l'expression de la force de gravitation exercée par un point M_1 de masse m_1 sur un point M_2 de masse m_2. On notera $r = M_1M_2$ la distance entre les points, $\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{r}$ le vecteur unitaire orienté de M_1 vers M_2, et $\mathcal{G}$ la constante d'interaction gravitationnelle.

b) Montrer que cette force est conservative et donner l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle correspondante. On choisira l'origine de l'énergie potentielle lorsque r tend vers l'infini.

Mouvement sur l'orbitogramme

On étudie le mouvement d'une bille M, de masse m, assimilée à un point matériel sous l'action du champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$, sur une surface de révolution. La surface sur laquelle roule la bille est engendrée par la révolution d'une portion d'hyperbole d'équation $z = -\frac{k}{r}$ avec $k > 0$ (cf. figure ci-dessus).On néglige les frottements.

3. **a)** En appliquant le théorème de l'énergie mécanique, établir une intégrale première du mouvement. Le système est-il conservatif ? Pourquoi ?

b) Justifier <u>brièvement</u> que cet orbitogramme permet de reproduire le mouvement de corps célestes soumis à une force de gravitation.

4. **a)** Exprimer le moment cinétique en O, $\overrightarrow{\sigma}(O)$, dans la base cylindrique. en déduire sa projection σ^{Oz} sur l'axe Oz.

b) Montrer que σ^{Oz} se conserve au cours du temps. Quelle est la signification géométrique de ce résultat ? Dans la suite notera $C = r^2\dot{\theta}$.

5. Montrer que l'on peut définir une énergie potentielle effective $E_{p_{\text{eff}}}(r)$ de telle sorte que

$$E_m = \frac{1}{2}m\alpha(r)\dot{r}^2 + E_{p_{\text{eff}}}(r)\,.$$

Préciser l'expression des fonctions $\alpha(r)$ et $E_{p_{\text{eff}}}(r)$.

6. Tracer l'allure de la courbe $E_{p_{\text{eff}}}(r)$ en considérant C, k, m et g donnés. Indiquer les coordonnées des points particuliers. Montrer que $E_{p_{\text{eff}}}(r)$ passe par un minimum pour une valeur r_m de r que l'on exprimera en fonction des constantes.

7. En fonction de la valeur de l'énergie mécanique initiale, quels sont les états possibles du système ? Que peut-on dire du mouvement dans chaque cas ?

8. On se place dans le cas d'un mouvement oscillatoire autour de r_m.

a) Établir une expression donnant la période des oscillations à partir d'une intégrale.

b) Que vaut cette période lorsque les oscillations sont de très petite amplitude ?

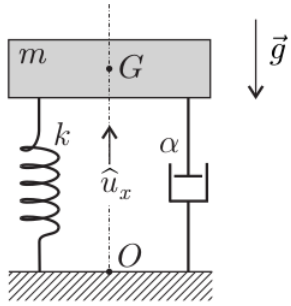
9. On lance la bille à l'instant initial avec une vitesse v_0 orthoradiale et à une position telle que $r = r_0$.
En déduire l'expression de C ?
À quelle condition sur v_0 et r_0 le mouvement est-il alors circulaire ?
Ré-exprimer ce résultat sous la forme d'une relation équivalente à la troisième loi de Kepler.

II. Le millenium bridge

Pour marquer le millénaire, une nouvelle passerelle a été construite au dessus de la Tamise à Londres pour un coût total de plus de 20 millions de Livres Ster- ling. Quand elle fut ouverte aux piétons on remar- qua très vite qu'elle se balançait latéralement et ver- ticalement en cas de forte affluence. Avec un grand nombre de piétons, son mouvement oblique était tel que la plupart d'entre eux s'arrêtaient et s'accrochaient aux rampes. Des images et des vidéos ont montré que ces mouvements latéraux pouvaient avoir une ampli- tude moyenne de 75 mm et qu'ils se produisaient avec des fréquences de l'ordre du hertz. Le pont fut donc fermé deux jours après son ouverture au public. Dix- huit mois de recherches furent nécessaire pour résoudre le problème et faire les modifications préconisées par les ingénieurs qui furent donc finalement consultés.

L'objectif du problème original est la modélisation de plus en plus fine d'une passerelle piétonne et la compréhension de certains problèmes posés par le Millennium Bridge de Londres. Ici on n'abordera que la première partie de ce problème, dans laquelle le pont est modélisé simplement comme un oscillateur simple de type masse-ressort.

A l'exception de i tel que $i^2 = -1$, les grandeurs complexes sont soulignées : $\underline{z} \in \mathbb{C}$.
Un point sur une grandeur indique la dérivée par rapport au temps de cette grandeur : $\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.
Sur les figures, les vecteurs sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires (ex : $\hat{u}_x$). On pourra conserver la notation habituelle dans la copie.

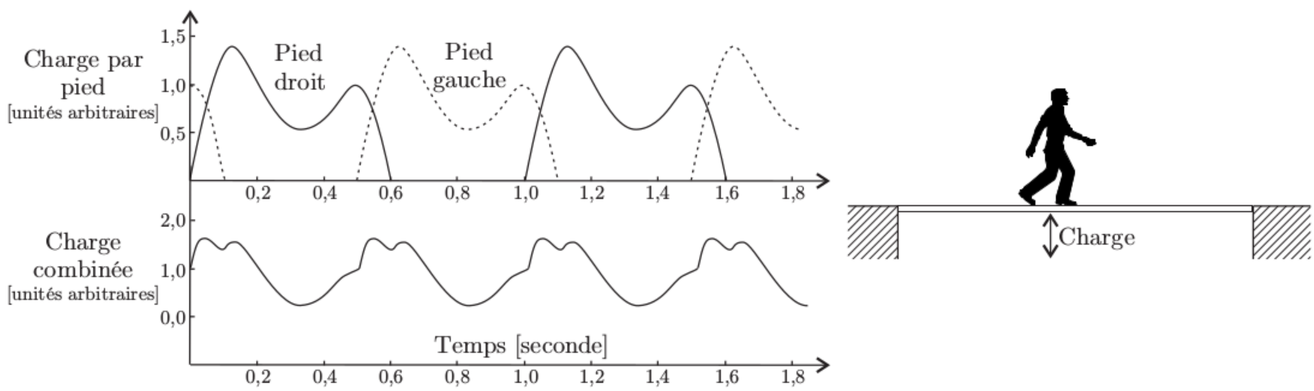


Un oscillateur est constitué d'une masse m dont le centre d'inertie G est repéré par la position x dans le référentiel galiléen $(O, \vec{u}_x)$ (voir figure ci-contre). L'origine O se situe au niveau du sol. L'oscillateur est relié à un support fixe par l'intermédiaire d'un ressort linéaire de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 ainsi que d'un amortisseur linéaire de viscosité α, exerçant sur m une force de frottement $\vec{F}_f = -\alpha\dot{x}\vec{u}_x$, avec $\alpha > 0$. À tout instant t, on assimile la distance OG à la longueur $\ell(t)$ du ressort. L'ensemble est soumis à l'accélération de la pesanteur $\vec{g} = -g\,\vec{u}_x$ avec $g = 9,81\,\mathrm{m.s^{-2}}$.

1. En appliquant le théorème de la résultante cinétique, établir l'équation différentielle $\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = 0$ dans laquelle on a introduit la fonction $X(t) = x(t) - \tilde{x}$ où $\tilde{x}$ est une constante que l'on déterminera en fonction de g, ω_0 et ℓ_0. On précisera les expressions et significations de ω_0 et ξ.

2. Dans le régime libre, le système est mis en vibration uniquement par des conditions initiales non nulles $X(0) = X_0 \neq 0$ et $\dot{X}(0) = V_0 \neq 0$. Déterminer les solutions du régime libre (en fonction de ω_0 , ξ, X_0, V_0 et t) pour les cas $\xi = 0$ et $0 < \xi < 1$ et préciser leur comportement.
Dans certains cas, le vent peut induire sur le système une force proportionnelle au vecteur vitesse que l'on écrit $\vec{F}_v = \beta\dot{x}\vec{u}_x$, avec $\beta > 0$. Quelle peut-être la conséquence de ce phénomène ?

Différents cas peuvent être examinés pour l'excitation (ou forçage) $F(t)$ de l'oscillateur étudié lors des deux premières questions. Nous nous placerons dans l'optique d'une passerelle piétonne. L'action de la marche d'un piéton est caractérisée par un contact continu sur la surface du sol puisque le second pied touche le sol avant que le premier ne le quitte. La force engendrée comprend une composante verticale et une composante horizontale non prise en compte dans cette partie.



Forçage d'une passerelle par la marche d'un piéton.

Dans le cadre d'un modèle simplifié, nous représenterons cette force, appelée charge, par un vecteur périodique $\vec{F}(t) = \vec{F_0} + \vec{F_1}(t)$ avec $\vec{F_1}(t) = \vec{F}_{1\,m}\cos(2\pi f t)$.
Le vecteur $\vec{F_0}$ correspond à la force statique, c'est-à-dire au poids du piéton, la fréquence f correspond à celle d'une marche normale. Nous considérerons que $\vec{F}_{1\,m} = 0,4\vec{F_0}$. Ces deux vecteurs seront supposés constants et orientés comme $-\vec{u}_x$. On note $F_0 = ||\vec{F_0}||$ le module de la force statique, $Y = X + \frac{F_0}{m\omega_0^2}$ la réponse dynamique de l'oscillateur et $\underline{Y} = \underline{Y}_m\, e^{i\omega t}$ sa représentation complexe.

3. Que devient l'équation de l'oscillateur en Y sous le forçage piéton ? Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}(\omega)$, rapport de la représentation complexe de la réponse dynamique $\underline{Y}$ sur la représentation complexe de l'excitation $\underline{E} = \frac{1}{m}\underline{F_1}$. On exprimera $\underline{H} = \frac{\underline{Y}}{\underline{E}}$ en fonction de ξ, ω_0 et $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$.

4. Sous quelle condition portant sur ξ, un phénomène de résonance peut-il se produire ? Pour quelle pulsation ω_r obtient-on alors ce phénomène ? Exprimer le gain à la résonance $|\underline{H}|(\omega_r)$ dans la limite $\xi^2 \ll 1$.

5. En se plaçant dans l'hypothèse $\xi^2 \ll 1$ et à partir d'une analyse de la courbe 1 de la figure ci-dessous, déterminer un ordre de grandeur de ξ ainsi que la valeur de la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur modélisant le Millennium Bridge avant la mise en place des amortisseurs harmoniques.

6. Pourquoi est-il important de déterminer les fréquences de résonance d'une structure soumise à une action périodique ?

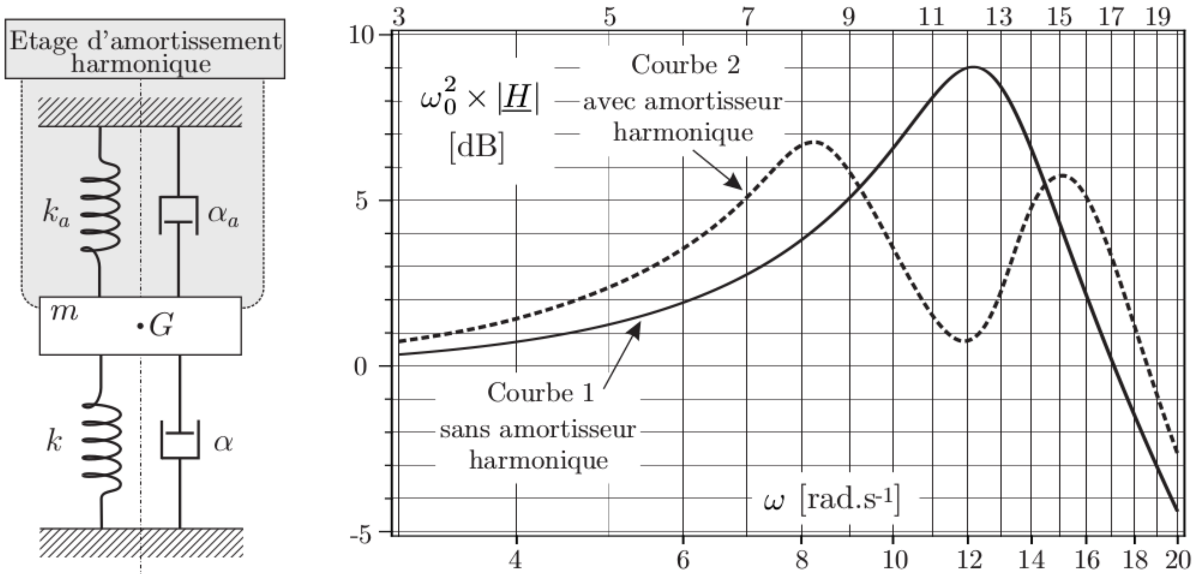
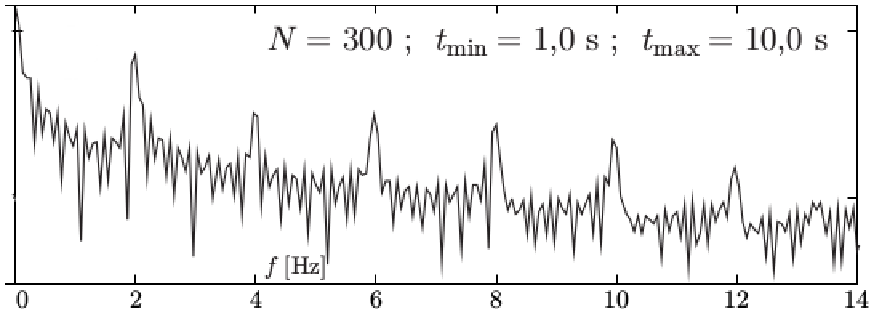


Schéma et réponse d'un amortisseur harmonique appliqué au modèle du Millennium Bridge.

Afin d'étudier précisément les propriétés du forçage que constitue la marche d'un piéton, on réalise l'acquisition en laboratoire du signal correspondant à cette sollicitation. L'acquisition est effectuée sur des durées allant de quelques secondes à quelques minutes. Les signaux ainsi obtenus sont similaires mais pas parfaitement identiques. Chacun de ces signaux présente les caractéristiques essentielles du signal de la charge combinée représentée précédemment. On calcule alors le spectre (en amplitude) de ces signaux en les échantillonnant en $N = 300$ points équidistants sur un intervalle $[t_{\min}, t_{\max}]$.

7. Un spectre est présenté ci-dessous. Est-il correctement échantillonné ? Pourquoi ?
En déduire la (ou les) fréquence(s) caractéristique(s) de la marche étudiée. Etait-ce qualitativement prévisible ?



Spectre des signaux correspondant à la marche d'un piéton.

8. À partir d'une exploitation des données fournies dans le sujet, expliquer l'origine du problème concernant le Millennium Bridge et justifier que l'installation d'amortisseurs harmoniques ait pu le résoudre.

III. Microscopie à force atomique

La sonde de mesure d'un microscope à force atomique (AFM pour Atomic Force Microscope) est principalement constituée d'un levier de dimensions micrométriques au bout duquel est fixée une pointe de forme conique. Cette pointe entre en interaction via des forces de Van der Waals avec les surfaces que l'on cherche à imager. La distance pointe-surface est de l'ordre de quelques nanomètres.

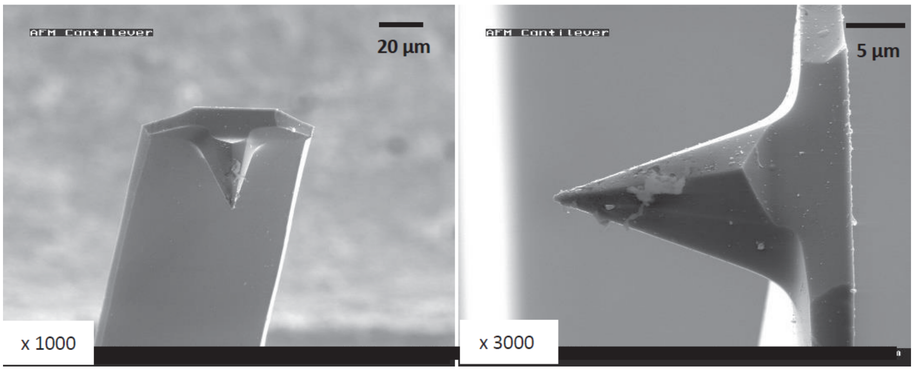


FIGURE 1 – Images de la pointe d'un microscope à force atomique, obtenues avec un microscope électronique à balayage (MEB) : au lieu d'être éclairés par de la lumière visible, comme c'est le cas dans un microscope traditionnel, les objets sont «éclairés» avec des électrons.

1. La pointe du microscope se situe sous un levier parallélépipédique de longueur L, de largeur a et d'épaisseur e. Évaluer la largeur et la hauteur de la pointe AFM, ainsi que la largeur et l'épaisseur du levier.

2. Quelle est selon vous l'information qui figure dans l'encart blanc en bas à gauche des images sous la forme « x ....» ? Comparer aux microscopes optiques «traditionnels».

3. Expliquer de manière qualitative pourquoi on ne peut pas obtenir cette image avec un microscope optique traditionnel.

Système pointe-levier

Le levier est encastré horizontalement dans une paroi. Au repos, le système {levier-pointe}, de masse m, est horizontal, à la hauteur d_0 de l'échantillon (on néglige son poids). Quand on applique une force verticale $\overrightarrow{F_{ext}}$ (on supposera que la force reste verticale tout au long de l'expérience) à l'extrémité libre du système, celui-ci est déformé. L'extrémité est déplacée verticalement d'une distance z que l'on appelle la flèche (voir figure 2) et se trouve alors à une distance $d(z)$ de l'échantillon.

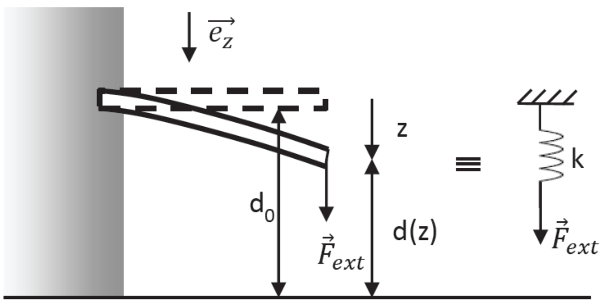


FIGURE 2 – Système encastré dans une paroi et modèle

La flèche z est donnée par la relation suivante :

$$z = \frac{4L^3}{Eae^3} F_{ext}$$

où E est appelé module d'Young du matériau constituant le levier et la pointe, et $\overrightarrow{F_{ext}} = F_{ext} \cdot \overrightarrow{u_z}$ où $\overrightarrow{u_z}$ est un vecteur unitaire de l'axe z vertical ascendant.

4. Quelle est la dimension du module d'Young ?

5. En se plaçant à l'équilibre, montrer que l'on peut modéliser le système par un ressort de longueur à vide nulle et de constante de raideur k dont on donnera l'expression analytique en fonction de E, a, L et e.

6. Calculer numériquement k pour une fibre de silicium de longueur $L = 2,0.10^2\,\mu$m, de largeur $a = 50\,\mu$m, d'épaisseur $e = 5,0\,\mu$m et de module d'Young $E = 1,0.10^{11}$ U.S.I..

Dans un premier temps, on ne considère pas les forces d'interactions entre la pointe et l'échantillon. Le levier et la pointe sont seuls. Le déplacement d'une céramique piézoélectrique, soumet le système pointe-levier à une force excitatrice

$$\overrightarrow{F}_{ext} = F_m \cos(\omega t)\overrightarrow{u_z}$$

De plus, le système est soumis à une force de frottement fluide, linéaire en vitesse et de coefficient α, ainsi qu'à la force de rappel du ressort. On note z l'écart à la position d'équilibre.

7. En déduire l'équation de la dynamique du mouvement du système pointe-levier :

$$\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = A\cos(\omega t)$$

Donner les expressions littérales de la pulsation propre ω_0 et des facteurs γ et A.

8. En déduire l'expression du facteur de qualité Q.

On note $\underline{z}(t) = \underline{Z_0}e^{j\omega t}$ la solution particulière de l'équation complexe associée à l'équation différentielle obtenue en **7.**, avec $j^2 = -1$.

9. Étudier les comportements asymptotiques en basse et haute fréquence du système.
Sur un grand schéma, représenter qualitativement l'allure de la courbe de $|\underline{Z_0}|$ en fonction de ω dans le cas où $Q \gg 1$ et $Q \ll 1$ (sans calculs).

Prenons à présent en considération, en plus de la force excitatrice, la force d'interaction entre la pointe et la surface que l'on écrira formellement $\overrightarrow{F}_{int} = F_{int}(z)\overrightarrow{u_z}$.

10. En faisant l'hypothèse que le système pointe-levier subit de petites oscillations, écrire formellement le développement limité (série de Taylor) à l'ordre 1 de F_{int} au voisinage de la position d'équilibre et écrire la nouvelle équation de la dynamique du système en présence de cette interaction.

11. Montrer que la nouvelle pulsation propre s'écrit $\Omega_0 = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{k}\frac{dF_{int}}{dz}}$.

On peut montrer (on ne demande pas de le faire ici) que la force d'interaction peut être mise sous la forme :

$$F_{int}(z) = \frac{HR}{6d^2(z)}$$

où R est le rayon de courbure de la pointe et $H = 1,4.10^{-20}$ U.S.I. est la constante de Hammacker.

12. À l'aide de la figure 2, déterminer une relation entre z, $d(z)$ et d_0, puis exprimer $\frac{dF_{int}}{dz}$.

13. Pour un rayon de courbure de 10 nm et une distance pointe-échantillon de 10 nm, évaluer l'écart relatif à la pulsation de résonance que génère l'existence d'une interaction. Se produit-il vers les hautes ou les basses fréquences ?

14. Reprendre le schéma de résonance précédemment réalisé et y ajouter une représentation qualitative du cas résonant prenant désormais en compte l'interaction décrite précédemment.

Force d'interaction

Les interactions entre la pointe AFM et l'échantillon sont conservatives.

15. Le profil de l'énergie potentielle d'interaction $E_p(z)$ est représenté sur la figure 3. Distinguer deux domaines : l'un pour lequel l'interaction est répulsive et l'autre pour lequel elle est attractive. Justifier.

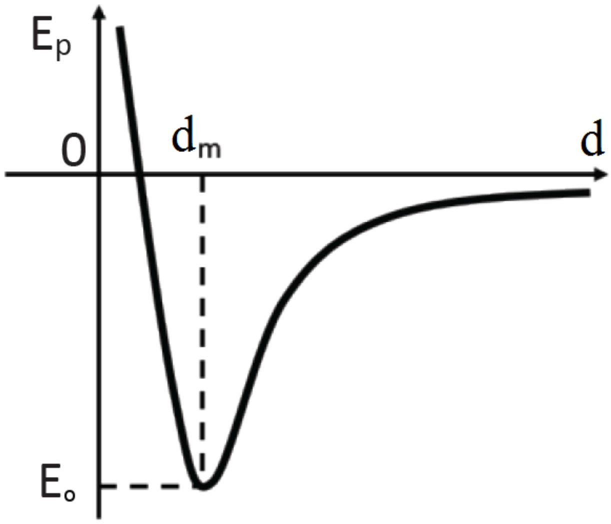


FIGURE 3 – Profil d'énergie d'interaction entre la pointe AFM et l'échantillon, en fonction de la distance $d(z)$ entre la pointe et l'échantillon

16. Quelle énergie faut-il apporter au système à l'équilibre pour éloigner la pointe à une distance macroscopique (*i.e.*, à l'infini) ? Justifier.

* * * FIN DE L'ÉPREUVE * * *