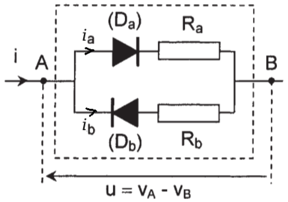
Électricité

I. Principe d'un hygromètre capacitif *(d'après E3A PC 2009)*

1. On obtient $\boxed{C_0 = C_h(h_r = 0)} = \underline{110\,\text{pF}}$ et $\boxed{a = \dfrac{C_h(h_r=1)}{C_0} - 1} = \underline{1,27}$.

2. On défini i_a et i_b les courants passant respectivement dans chaque diode de A vers B, de telle sorte que $i = i_a + i_b$.



- Supposons D_a et D_b **bloquées**, alors $i_a = i_b = i = 0$ donc les tensions aux bornes des résistances sont nulles, d'où $u = u_{da} \leq 0$ et $u = u_{db} \geq 0$ et donc finalement $u = 0$.
- Supposons D_a et D_b **passantes**, alors $u_{da} = u_{db} = 0$, les tensions aux bornes des diodes sont nulles, d'où $u = R_a i_a \geq 0$ et $u = R_b i_b \leq 0$ et donc $u = 0$ et $i_a = i_b = i = 0$.

Finalement, les diodes ne peuvent avoir le même état qu'au point origine ($u = 0, i = 0$), c'est-à-dire quand il ne se passe rien. **Donc pour tous les états utiles, l'une des diodes est bloquée et l'autre passante.** On en déduit que :

• si D_a est passante, alors $\boxed{u = R_a i}$ $\underline{\text{pour } u \geq 0}$. • si D_b est passante, alors $\boxed{u = R_b i}$ $\underline{\text{pour } u \leq 0}$.	Le dipole (AB) forme donc **un résistor dont la résistance est différente selon le sens de passage du courant.**

3. Pour $t \in]0, T_1[$, la loi des mailles s'écrit $E = u_{AB} + u_c$. Par continuité de la tension u_c, qui est nulle à $t = 0$, on a $u_{AB}(t = 0^+) = E > 0$ donc le courant i passe par R_a et le condensateur se charge car $i > 0$, de telle sorte que u_c croît. Le circuit équivalent est donc R_a en série avec C_h et on observe la charge du condensateur jusqu'à la date T_1.

On a $E = R_a i + u_c = R_a C_h \frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + u_c$ donc $\boxed{\tau_a \dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + u_c = E}$ en posant le temps caractéristique $\boxed{\tau_a = R_a C_h}$.

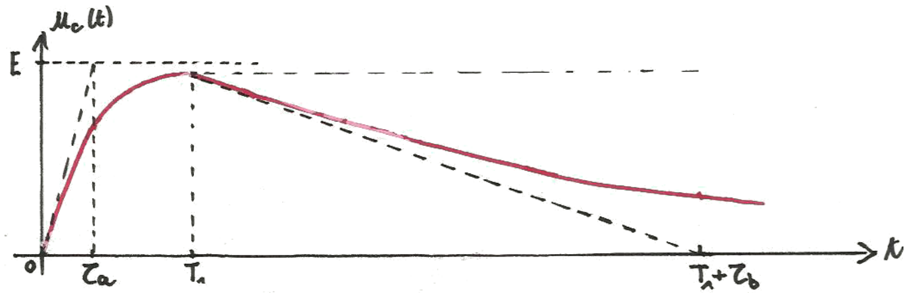
La solution s'écrit $u_c(t) = \lambda\, e^{-\frac{t}{\tau_a}} + E$. Par continuité on a $u_c(0) = 0 = \lambda + E$. Donc finalement $\lambda = -E$ et $\boxed{u_c(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_a}}\right)}$ $\underline{\text{pour } t \in]0, T_1[}$.

4. Pour $t > T_1$, la loi des mailles s'écrit maintenant $0 = u_{AB} + u_c$. Par continuité $u_c(T_1) > 0$, donc $u_{AB}(T_1^+) < 0$ puisque la somme est nulle, et le courant $i < 0$ passe donc par R_b, le condensateur se décharge.

On a alors $\boxed{\tau_b \dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + u_c = 0}$, en posant le temps caractéristique $\boxed{\tau_b = R_b C_h}$, et ceci tant que $u_{AB} < 0$ donc $\underline{\text{tant que } u_c > 0}$.

La solution s'écrit $u_c(t) = \mu\, e^{-\frac{t-T_1}{\tau_b}}$, et sa continuité impose $u_c(T_1) = \mu = E\,(1 - e^{-\frac{T_1}{\tau_a}})$. Finalement on obtient $\boxed{u_c(t) = E\left(1 - e^{-\frac{T_1}{\tau_a}}\right) e^{-\frac{t-T_1}{\tau_b}}}$, qui est valable $\underline{\text{pour tout } t > T_1}$ car la solution est positive à tout instant.

5. On a donc $\tau_b = 10\tau_a$.

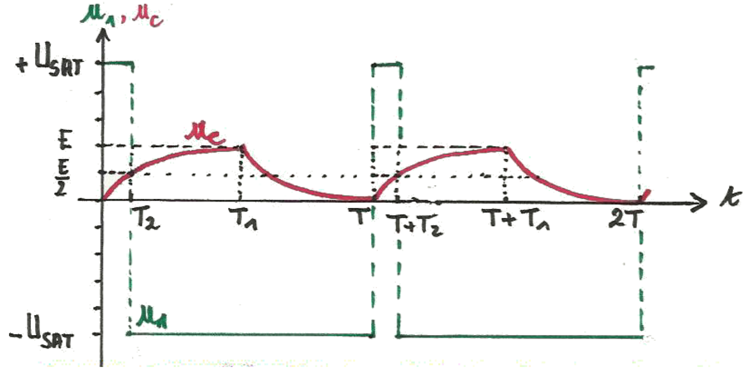


6. Comme $i_+ = 0$, les deux résistances R_0 forment un pont diviseur de tension, d'où après simplification $\boxed{v_+ = \dfrac{1}{2}\, u_e}$.

7. Le circuit avec AO sert de *comparateur* : la tension de sortie u_1 va basculer de $+U_{\text{SAT}}$ vers $-U_{\text{SAT}}$ lorsque v_- dépassera $v_+ = \frac{E}{2}$. Cela se produit à l'instant T_2 tel que $\frac{E}{2} = E\left(1 - e^{-\frac{T_2}{\tau_a}}\right)$. On obtient $\boxed{T_2 = \tau_a \ln 2 \leq T_1}$.

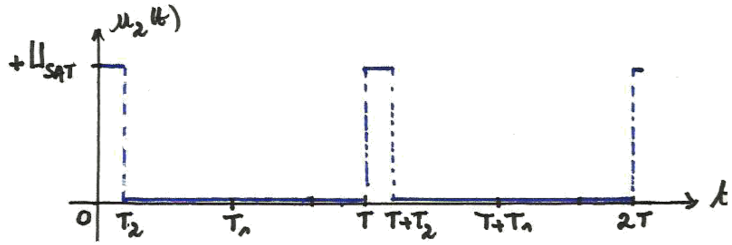
8. Le dispositif doit fonctionner avec toute valeur d'humidité. Or T_2 est maximale (respectivement minimale) pour une humidité maximalec $h = 1$ (minimale $h = 0$).
Obtient $\boxed{T_{1\,\min} \geq T_{2\,\max} = R_a C_{h\,\max} \ln 2} = \underline{468\,\mu s}$ et $\boxed{T_{2\,\min} = R_a C_{h\,\min} \ln 2} = \underline{207\,\mu s}$.

9. On a donc $T_2 = T_{2\,\min} = 207\,\mu s$ et $\tau_b = \tau_a$.



10.
- Lorsque $u_1(t) > 0$, la diode est forcément passante. En effet dans l'hypothèse contraire le courant circulant dans R_1 serait nul donc on aurait $u_1 \leq 0$ pour que l'état soit bloqué, ce qui est contradictoire. Donc si D est passante $v_+ = u_1$ et donc $u_2 = u_1$.
- De même, lorsque $u_1(t) \leq 0$, la diode est forcément bloquée. Dans l'hypothèse contraire on aurait $u_1 = R_1 i_1$ avec $i_1 > 0$ le courant circulant de l'entrée + vers la masse, donc on aurait $u_1 > 0$ ce qui est contradictoire. Donc si D est bloquée on a $v_+ = R_1 i_1 = 0$ donc $u_2 = 0$.

Finalement, $\boxed{u_2 = u_1 \text{ si } u_1 > 0,\ u_2 = 0 \text{ sinon}}$.
Remarque : ce montage s'appelle un « redresseur mono-alternance », il fournit la partie positive d'un signal, et annule la partie négative. On peut aussi garder plutôt la partie négative en retournant la diode.



11. En appliquant la définition de la valeur moyenne, on obtient $\boxed{< u_2 >= U_{\mathrm{SAT}} \dfrac{T_2}{T}}$ (fonction constante pendant une durée T_2).
Remarque : on voit que le signal $< u_2 >$ est proportionnel à la durée T_2 elle-même proportionnelle à la capacité C_h, ce qui va permettre de mesurer l'humidité.

12. On a $< i_c >= \frac{1}{T}\int_0^T i_c(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T C\frac{\mathrm{d}u_3}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = C\,[u_3(t)]_0^T = C(u_3(T) - u_3(0))$. Donc $\boxed{< i_c >= 0}$ car comme tous les signaux, u_3 est périodique.
Or $u_2 = R_2 i + R_3(i - i_c)$, donc par linéarité de la moyenne : $< u_2 >= R_2 < i > + R_3(< i > - < i_c >) = (R_2 + R_3) < i >$ donc $< i >= \frac{< u_2 >}{R_2+R_3}$. On en déduit $< u_3 >= R_3 < i >= \frac{R_3}{R_2+R_3} < u_2 >$, donc $\boxed{< u_3 >= U_{\mathrm{SAT}} \dfrac{T_2}{T} \dfrac{R_3}{R_3+R_2}}$.
Remarque : on constate que ce circuit fonctionne en moyenne comme un pont diviseur de tension...

13. D'après les questions **3.**, **7.** et **12.**, on obtient $< u_3 >= U_{\mathrm{SAT}} \frac{R_3}{R_3+R_2} \frac{\ln 2\, R_a}{T} C_h$ avec $C_h = C_0\,(1 + a h_r)$ d'où

$$\boxed{h_r = \frac{1}{a}\left[\frac{< u_3 >}{U_{\mathrm{SAT}}}\left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right)\frac{T}{\ln 2\, R_a\, C_0} - 1\right]} = \underline{0,68 = 68\,\%}\,.$$

14. Si l'on injecte la loi des noeuds $i = C\frac{\mathrm{d}u_3}{\mathrm{d}t} + \frac{u_3}{R_3}$ dans la loi des mailles $u_2 = R_2 i + u_3$, on obtient après mise-en-forme $\boxed{\tau\dfrac{\mathrm{d}u_3}{\mathrm{d}t} + u_3 = \dfrac{R_3}{R_3+R_2} U_{\mathrm{SAT}}}$ $\forall t \in [0; T_2[$ avec $\boxed{\tau = \dfrac{R_2 R_3 C}{R_2 + R_3}}$.
La solution s'écrit $u_3(t) = \frac{R_3}{R_3+R_2} U_{\mathrm{SAT}} + \lambda\, e^{-\frac{t}{\tau}}$, avec pour condition initiale $u_3(0) = U_{\min}$. D'où

$$\boxed{u_3(t) = \left(\frac{R_3}{R_3+R_2} U_{\mathrm{SAT}} - U_{\min}\right)\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + U_{\min}}\,,\ \forall t \in [0; T_2[\,.$$

15. L'équation différentielle est la même que précédemment sauf que $u_2 = 0$, ce qui donne $\boxed{\tau\dfrac{\mathrm{d}u_3}{\mathrm{d}t} + u_3 = 0}$, $\forall t \in [T_2; T[$.
La solution s'écrit maintenant $u_3(t) = \mu\, e^{-\frac{t-T_2}{\tau}}$, avec pour condition initiale $u_3(T_2) = U_{\max}$. D'où

$$\boxed{u_3(t) = U_{\max}\, e^{-\frac{t-T_2}{\tau}}} = \forall t \in [T_2; T[\,.$$

16. On utilise les expressions établies en **14.** et **15.**. Par continuité de la tension u_3 en $t = T_2$ et $t = T$ respectivement, et en exploitant la périodicité, on a :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_3(T_2) & = & U_{\max} \\ u_3(T) & = & u_3(0) = U_{\min} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} U_{\max} & = & \left(\frac{R_3}{R_3+R_2} U_{\mathrm{SAT}} - U_{\min}\right)\left(1 - e^{-\frac{T_2}{\tau}}\right) + U_{\min} & (1) \\ U_{\min} & = & U_{\max}\, e^{-\frac{T-T_2}{\tau}} & (2) \end{array}\right.$$

On obtient ci-dessus un système linéaire de deux équations pour les deux inconnues $U_{\min}$ et $U_{\max}$. La combinaison linéaire $e^{-\frac{T-T_2}{\tau}} \times (1) + (2)$ conduit à

$$U_{\min} = \frac{R_3}{R_3+R_2} U_{\mathrm{SAT}}\left(1 - e^{-\frac{T_2}{\tau}}\right) e^{-\frac{T-T_2}{\tau}} + U_{\min}\, e^{-\frac{T}{\tau}} \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{U_{\min} = \frac{R_3}{R_3+R_2} U_{\mathrm{SAT}} \frac{1 - e^{-\frac{T_2}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}}\, e^{-\frac{T-T_2}{\tau}}}\,.$$

Puis (2) conduit à

$$\boxed{U_{\max} = \frac{R_3}{R_3+R_2} U_{\mathrm{SAT}} \frac{1 - e^{-\frac{T_2}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}}}\,.$$

17. En réunissant les résultats des questions **12.** et **16.**, on obtient $\boxed{\rho = \dfrac{T}{T_2}\dfrac{1 - e^{-\frac{T_2}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}}\left(1 - e^{-\frac{T-T_2}{\tau}}\right)} = \underline{9,0\,\%}$ et $\underline{7,7\,\%}$ respectivement pour les valeurs $T_{2\,\min}$ et $T_{2\,\max}$ obtenues en **8.** On constate que **le taux d'ondulation reste inférieur à 10% donc relativement faible**.

18. Indépendemment du signal d'entrée $u_e(t)$ et du filtre, c'est-à-dire en fixant T et τ, il ne reste que T_2 comme levier. Or on montre facilement que ρ **est une fonction décroissante de** T_2 **tant que** $T_2 \leq \frac{T}{2}$. Par conséquent, on peut réduire l'ondulation en augmentant T_2 de façon générale via τ_a. Comme τ_a dépend de l'humidité, il faut donc **augmenter le produit** $R_a C_0$.
La dépendance en τ n'étant pas évidente dans ce calcul, on ne peut conclure simplement sur l'effet du filtre [1].

1. cf cours ultérieur sur le Filtrage.