

# ÉLECTRICITÉ

Soignez la présentation et la rédaction, qui doit être complète et concise. Tout résultat doit être justifié, et mis en valeur. Les résultats littéraux doivent être homogènes. Les résultats numériques doivent avoir un nombre de chiffres significatifs vraisemblable. Les schémas doivent être clairs, suffisamment grands et lisibles. Si vous n'arrivez pas à montrer un résultat, admettez-le clairement et poursuivez.

## CALCULATRICES AUTORISÉES

### I. Principe d'un hygromètre capacitif

Certains oxydes métalliques comme  $\text{Al}_2\text{O}_3$  (alumine) sont hygroscopiques, c'est-à-dire qu'ils peuvent absorber l'eau contenue dans un gaz humide. En conséquence, leurs propriétés électriques, notamment leur permittivité diélectrique  $\epsilon$  sont modifiées. L'utilisation de ces substances comme isolant électrique d'un condensateur permet de réaliser des capacités  $C_h$  qui dépendent de l'humidité relative  $h_r$  selon la loi approchée :

$$C_h = C_0 (1 + ah_r)$$

où  $C_0$  et  $a$  sont deux constantes.

Ce type de condensateur est réalisé à partir d'une lame d'aluminium constituant l'une des armatures, sur laquelle est déposée une couche d'alumine poreuse. La seconde armature du condensateur est une lame d'or. La mesure de la capacité de ce type de condensateur constitue actuellement une technique fiable et précise pour déterminer l'humidité relative.

Étudions dans cette partie un montage électrocinétique permettant la mesure de  $C_h$ . Le montage complet est représenté sur la figure 1 et ses différents éléments seront abordés successivement au cours du problème.

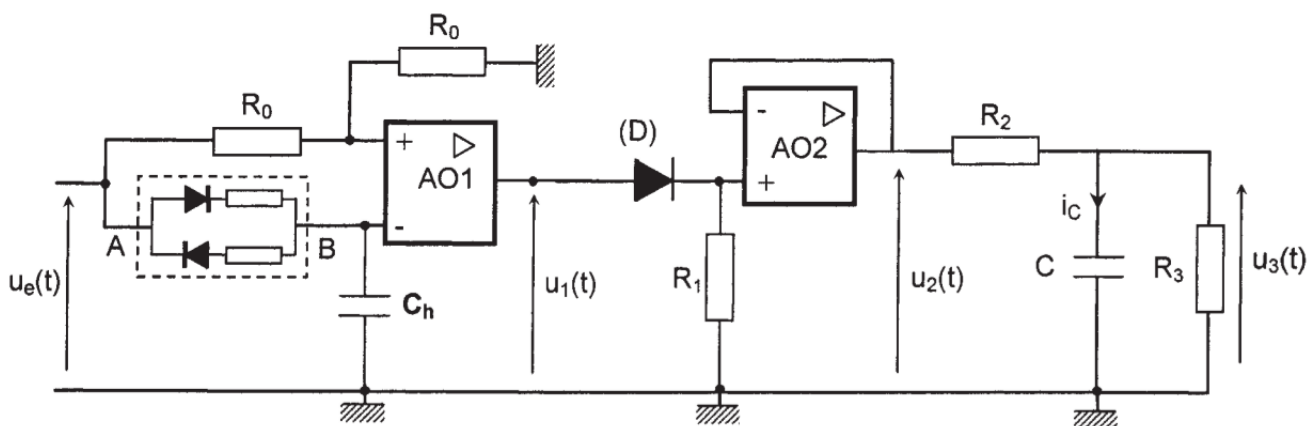


Figure 1 : Schéma électrique complet de l'hygromètre.

Les diodes utilisées (figure 2) sont supposées idéales, ce qui signifie :

- $i_d = 0$  lorsque  $u_d \leq 0$  (état bloqué)
- $u_d = 0$  lorsque  $i_d \geq 0$  (état passant)

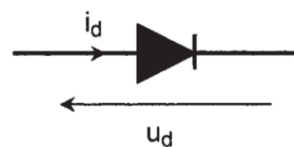


Figure 2 : Diode.

1. La capacité étudiée varie de 110 pF à 250 pF lorsque l'humidité relative  $h_r$  passe de la valeur 0 à la valeur 1. Calculer les valeurs numériques de  $C_0$  et  $a$ .

Considérons le dipôle (AB) représenté sur la figure 3a, pour lequel  $(D_a)$  et  $(D_b)$  sont deux diodes idéales identiques.

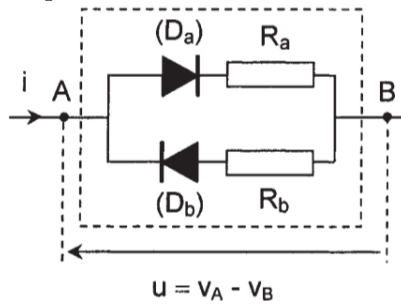


Figure 3a.

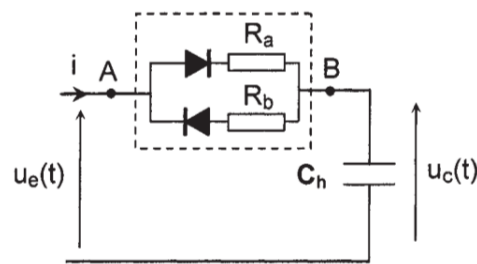


Figure 3b.

2. Montrer que les deux diodes ne peuvent pas être simultanément dans le même état. Déterminer, selon le signe de la tension  $u$ , le résistor ohmique équivalent à (AB).

Ce dipôle est maintenant inséré dans le montage de la figure 3b, dans lequel  $u_e(t)$  est une tension nulle pour  $t < 0$  et  $t > T_1$  et égale à une constante  $E > 0$  lorsque  $0 < t < T_1$ . À l'instant  $t = 0$ , le condensateur est déchargé.

3. Établir l'équation différentielle vérifiée par  $u_c(t)$  puis exprimer sa solution pour  $0 < t < T_1$ , en faisant apparaître une constante de temps, notée  $\tau_a$  dont on donnera l'expression. On expliquera succinctement le choix du résistor.
4. À partir de l'instant  $T_1$ ,  $u_e(t)$  redevient nulle. Quelle est alors l'équation différentielle vérifiée par  $u_c(t)$ ? Expliciter dans ce cas  $u_c(t)$  pour  $t > T_1$ , en fonction des paramètres  $E$ ,  $T_1$ ,  $R_a$ ,  $R_b$  et  $C_h$ . On pourra aussi introduire un temps  $\tau_b$ .
5. Représenter l'allure de  $u_c(t)$  en fonction du temps dans le cas particulier où  $R_b = 10R_a$ . Faire figurer sur ce schéma les asymptotes et les points remarquables.

Dans le montage de la figure 4a, l'Amplificateur Opérationnel (AO1) est supposé idéal et fonctionne en régime de saturation. Cela signifie que :

- $u_1(t) = +U_{SAT}$  si les potentiels des entrées + et - vérifient  $v_- < v_+$ ,
- $u_1(t) = -U_{SAT}$  si  $v_- > v_+$ ,

où  $U_{SAT}$  est une tension de saturation de l'ordre de 15 V. De plus cela implique que **les courants pénétrant dans les entrées sont nuls** :  $i_+ = i_- = 0$ .

La tension  $u_e(t)$  est maintenant une tension créneau périodique de période  $T$ , maintenue à une valeur constante  $E > 0$  pendant une durée  $T_1$  ( $T_1 < T$ ) et nulle pendant le reste de la période, schématisée sur la figure 4b.

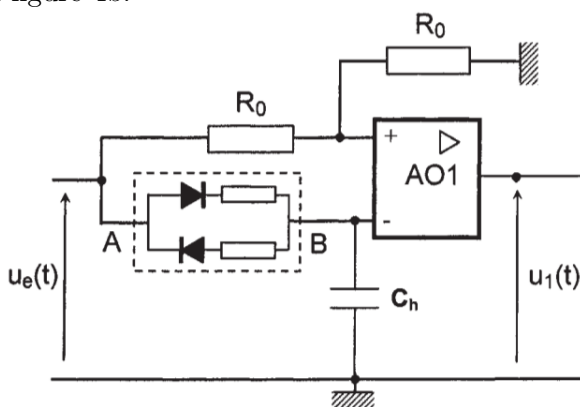


Figure 4a.

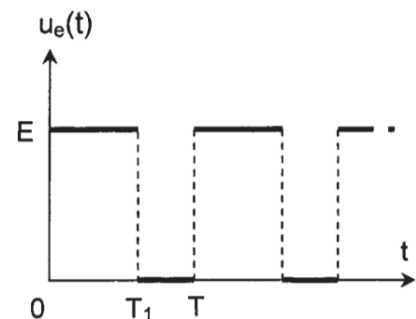


Figure 4b.

Le régime permanent est supposé établi : **toutes les tensions sont périodiques avec la même période T**. Le fonctionnement du montage sera donc étudié seulement entre les instants 0 et T. Cette période est choisie de sorte que  $R_b C_h \ll T$ , ce qui entraîne que le condensateur est déchargé à la fin de chaque période.

6. Calculer le potentiel  $v_+$  en fonction de  $u_e$ .

7. Déterminer, en fonction de  $\tau_a$  notamment, l'instant  $T_2$  qui correspond au basculement de  $u_1(t)$  de la valeur  $+U_{SAT}$  à la valeur  $-U_{SAT}$ . On supposera que ce basculement intervient durant la phase où  $u_e(t) = E$ , c'est-à-dire que  $\tau_a$  est tel que  $T_2 < T_1$ . Cette condition sera supposée vérifiée par la suite.
8. Évaluer la valeur minimale de  $T_1$  assurant le fonctionnement correct du montage, sachant que  $R_a = 2,70 \text{ M}\Omega$ . Calculer les deux valeurs extrêmes de  $T_2$  qui correspondent respectivement à  $C_h = 110 \text{ pF}$  et  $C_h = 250 \text{ pF}$ .
9. En choisissant les valeurs numériques suivantes :  $T = 2,0 \text{ ms}$ ,  $T_1 = 1,0 \text{ ms}$ ,  $C_h = 110 \text{ pF}$ ,  $R_a = R_b = 2,70 \text{ M}\Omega$ ,  $E = 5,0 \text{ V}$  et  $U_{SAT} = 12,5 \text{ V}$ , représenter à l'échelle les tensions  $u_c(t)$  et  $u_1(t)$  sur un même graphique, sur un intervalle de temps de deux périodes.

Le montage représenté sur la figure 5 est destiné à mettre en forme la tension  $u_1(t)$  délivrée par le circuit précédent. Il comprend une diode (D) idéale et un amplificateur opérationnel idéal (AO2) fonctionnant en régime linéaire. Cela signifie que les potentiels des entrées + et - vérifient  $v_- = v_+$ , et comme précédemment que **les courants pénétrant dans les entrées sont nuls** :  $i_+ = i_- = 0$ . Par conséquent, dans ce montage appelé *montage suiveur*, la tension de sortie  $u_2$  est égale à la tension aux bornes de la résistance  $R_1$  :  $u_2 = v_+$ .

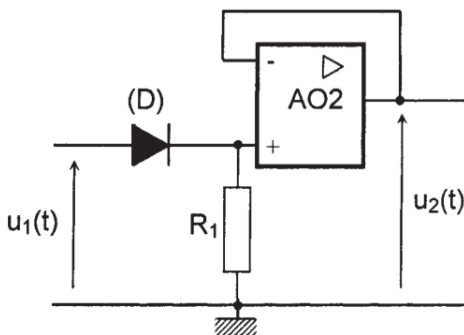


Figure 5.

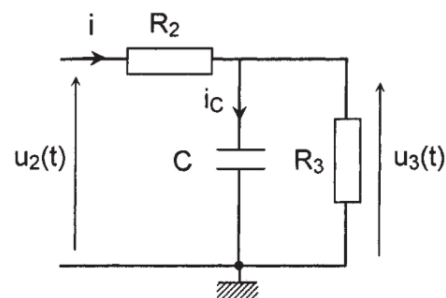


Figure 6.

10. Déterminer, selon le signe de  $u_1(t)$ , l'expression de la tension  $u_2(t)$  en sortie de l'AO2. Représenter le chronogramme de  $u_2(t)$  sur un intervalle de temps de deux périodes.

Cette tension  $u_2$  est appliquée à l'entrée du filtre passif représenté sur la figure 6 et constitué de deux résistances  $R_2$  et  $R_3$ , ainsi que d'un condensateur de capacité  $C$ . **La fonction de ce filtre est de produire une tension  $u_3(t)$  quasi-constante pour évaluer la valeur moyenne de  $u_2(t)$ .**

Le régime permanent étant établi, la tension  $u_3(t)$  est périodique de période  $T$  : elle évolue entre une valeur minimale  $U_{\min}$  atteinte aux temps  $nT$  ( $n$  entier) et une valeur maximale  $U_{\max}$  atteinte aux temps  $nT + T_2$ , où  $T_2$  est la durée déterminée à la question 7.

Etant donnée une fonction  $f(t)$  périodique de période  $T$ , sa valeur moyenne est définie par :

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt.$$

11. Calculer la valeur moyenne de  $u_2(t)$  en fonction de  $U_{SAT}$ ,  $T$  et  $T_2$ .
12. Montrer que la valeur moyenne de l'intensité qui traverse le condensateur est nulle. En déduire la valeur moyenne  $\langle u_3(t) \rangle$  en fonction de  $U_{SAT}$ ,  $T$ ,  $T_2$ ,  $R_2$  et  $R_3$ .
13. Au contact de l'air ambiant d'un local, le dispositif délivre une tension moyenne  $\langle u_3 \rangle = 1,72 \text{ V}$ . Déterminer l'humidité relative  $h_r$  dans le local, en utilisant les données numériques suivantes :  $R_2 = 56,0 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 140 \text{ k}\Omega$ ,  $R_a = 2,70 \text{ M}\Omega$ ,  $U_{SAT} = 12,5 \text{ V}$  et  $T = 2,0 \text{ ms}$ .

Dans la suite, on souhaite quantifier l'ondulation de  $u_3(t)$  autour de sa valeur moyenne. Afin d'alléger les expressions littérales intervenant dans les questions suivantes, posons la quantité

$$\tau = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} C.$$

14. Écrire l'équation différentielle du premier ordre à laquelle obéit  $u_3(t)$  lorsque  $0 < t < T_2$ . Expliciter sa solution en fonction de  $U_{\min}$ ,  $U_{\text{SAT}}$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  et  $\tau$ . (ne pas chercher à déterminer  $U_{\min}$  dans cette question).
15. Quelle est l'équation différentielle satisfaite par  $u_3(t)$  lorsque  $T_2 < t < T$ ? Déterminer sa solution en fonction de  $U_{\max}$ ,  $\tau$  et  $T_2$ . (sans chercher à déterminer  $U_{\max}$  dans cette question).
16. Montrer que  $U_{\max}$  et  $U_{\min}$  prennent les valeurs suivantes :

$$U_{\max} = \frac{R_3}{R_2 + R_3} U_{\text{SAT}} \frac{1 - e^{-\frac{T_2}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} \quad \text{et} \quad U_{\min} = \frac{R_3}{R_2 + R_3} U_{\text{SAT}} e^{-\frac{T-T_2}{\tau}} \frac{1 - e^{-\frac{T_2}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}}$$

17. Le *taux d'ondulation*  $\rho$  est défini par le quotient  $\rho = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{\langle u_3(t) \rangle}$ . Déterminer l'expression du taux  $\rho$  en fonction de  $T$ ,  $T_2$  et  $\tau$ .  
*Application numérique* : calculer  $\rho$  en prenant les deux valeurs extrêmes de  $T_2$ , avec pour valeurs numériques  $T = 2,0$  ms et  $\tau = 20$  ms. Conclure.
18. Sur quel(s) facteur(s) est-il possible de jouer pour diminuer le taux d'ondulation  $\rho$ ?