

THERMODYNAMIQUE

I. Impact mécanique de la pluie sur un pare-brise d'avion (d'après X-ENS-ESPCI PC 2016)

I.1. Effort mécanique

1. a) Rayon d'une goutte de pluie : $r \sim 1 \text{ mm}$, vitesse de chute de la pluie : $u \sim 10 \text{ m.s}^{-1}$.
- b) Pendant dt , les gouttes qui vont toucher le sol sur une surface horizontale S sont contenues dans un cylindre de hauteur $u dt$. Elles sont donc au nombre de

$$N_0 S u dt = \frac{IS dt}{\frac{4}{3}\pi r_0^3} \Rightarrow N_0 = \frac{3I}{4\pi r_0^3 u}$$

- c) Application numérique : $N_0 = \frac{3}{4\pi} \times \frac{300 \times 10^{-3}}{3600} \times \frac{1}{125 \times 10^{-12} \times 10} \approx 1,6 \times 10^4 \text{ gouttes.m}^{-3}$.
- d) Chaque goutte dispose individuellement en moyenne d'un volume $d_0^3 = \frac{1}{N_0}$. D'où une distance

$$\text{moyenne entre gouttes } d_0 = \left(\frac{1}{N_0}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 4 \text{ cm.}$$

2. a) L'avion étant immobile, les gouttes qui vont toucher le pare-brise pendant dt sont contenues dans un parallélépipède représenté ci-contre.

- b) Ce parallélépipède a pour volume $dV = h \cos \alpha u dt$, et contient $N_0 dV$ goutte. Chaque goutte, de masse m_g , cède sa quantité de mouvement $m_g u \vec{u}_x$ à l'avion, d'où un apport global $N_0 dV m_g u \vec{u}_x = \vec{F}_0 dt$. En notant que $m_g = \rho_e \frac{4}{3}\pi r_0^3$, on obtient finalement

$$\vec{F}_0 = k \cos \alpha S \rho_e u^2 \vec{u}_x \quad \text{avec} \quad k = \frac{4}{3}\pi r_0^3 N_0$$

On a donc $[k] = 1$. Le nombre k est donc **sans dimension**.

- c) On obtient $F_0 \approx 0,3 \text{ N}$.

3.

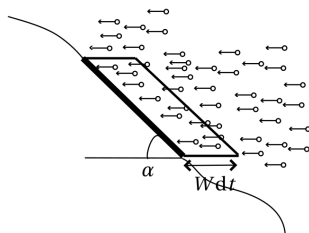
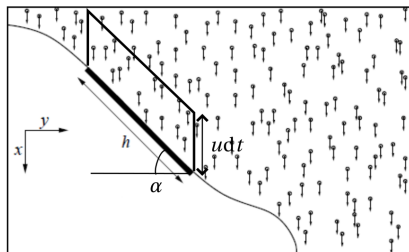
- a) Un avion volant à Mach 1 a une vitesse de l'ordre de $340 \text{ m.s}^{-1} \approx 1200 \text{ km.h}^{-1}$. On peut donc donner comme ordre de grandeur de la vitesse d'un avion de ligne $W \approx 3 \times 10^2 \text{ m.s}^{-1} \approx 10^3 \text{ km.h}^{-1}$.

- b) On a $W \gg u$. Dans le référentiel de l'avion, les gouttes ont donc une vitesse quasi horizontale. Le schéma précédent devient donc celui ci-contre.

- c) Le calcul est identique au précédent, sauf que la vitesse des gouttes, $u' \approx -W \vec{u}_y$, ainsi que le volume, $dV = h \sin \alpha \ell W dt$.

$$\text{On en déduit } \vec{F}_0 = -k \sin \alpha S \rho_e W^2 \vec{u}_y$$

- d) On obtient $F_0 \approx 2,6 \times 10^2 \text{ N}$.



I.2. Distribution du rayon des gouttes

4. a) Par définition, on a la condition de normalisation : $\int_{r=0}^{r \rightarrow \infty} dP = 1$ ou

$$N_0 = \int_{r=0}^{r \rightarrow \infty} dN = \int_0^\infty n_0 e^{-\frac{r}{\lambda}} dr = n_0 \lambda \quad \text{d'où} \quad [N_0 = n_0 \lambda]$$

- b) On fait la somme des probabilités compatibles avec l'événement aléatoire $r \leq \lambda$:

$$\mathcal{P}(r \leq \lambda) = \int_{r=0}^{\lambda} dP = \int_0^\lambda \frac{n_0}{N_0} e^{-\frac{r}{\lambda}} dr \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{P}(r \leq \lambda) = 1 - e^{-1}} = 0,63$$

De même, on fait la somme des probabilités compatibles avec l'événement aléatoire $r > \lambda$:

$$\mathcal{P}(r > \lambda) = \int_{r=\lambda}^{r \rightarrow \infty} dP = \int_\lambda^\infty \frac{n_0}{N_0} e^{-\frac{r}{\lambda}} dr \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{P}(r > \lambda) = \frac{1}{e}} = 0,37$$

Il y a donc environ **deux fois plus de gouttes qui ont un rayon inférieur à λ** que de gouttes qui ont un rayon supérieur à λ .

- c) Le rayon moyen s'obtient en pondérant chaque valeur de rayon par sa probabilité :

$$\langle r \rangle = \int_{r=0}^{r \rightarrow \infty} r dP = \int_0^\infty \frac{n_0}{N_0} e^{-\frac{r}{\lambda}} r dr \Rightarrow \boxed{\langle r \rangle = \lambda}$$

La dernière égalité est obtenue en calculant l'intégrale via une intégration par partie.

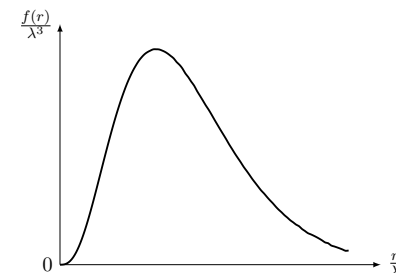
Les gouttes ne sont pas réparties moitié-moitié entre les gouttes qui ont rayon inférieur à λ et les gouttes qui ont un rayon supérieur à λ , il y en a plus qui ont un rayon inférieur à la moyenne. La médiane n'est pas égale à la moyenne.

5.

- a) $dM(r)$ représente la masse des gouttes de rayon compris entre r et $r + dr$ par unité de volume.

- b) $\mu(r) = \rho_e \frac{4\pi}{3} n_0 f(r)$ avec $f(r) = r^3 e^{-\frac{r}{\lambda}}$. Cette fonction positive admet un unique maximum en $r = 3\lambda$ et $\lim_{r \rightarrow 0, \infty} f(r) = 0$. L'allure est représentée ci-contre.

- c) Le rayon des gouttes dont la contribution à la masse totale par unité de volume est la plus importante correspond au maximum de $f(r)$, donc $\boxed{r = 3\lambda}$.



- d) La masse totale par unité de volume vaut $M_{\text{tot}} = \int_0^\infty dM(r) = \rho_e \frac{4\pi}{3} n_0 \lambda^4 I$ avec $I = \int_0^\infty x^3 e^{-x} dx = 6$ (par intégrations par parties successives). Finalement, en utilisant $N_0 = n_0 \lambda$, on obtient la masse

$$\text{moyenne des gouttes } \langle m \rangle = \frac{M_{\text{tot}}}{N_0} = \rho_e 8\pi \lambda^3$$

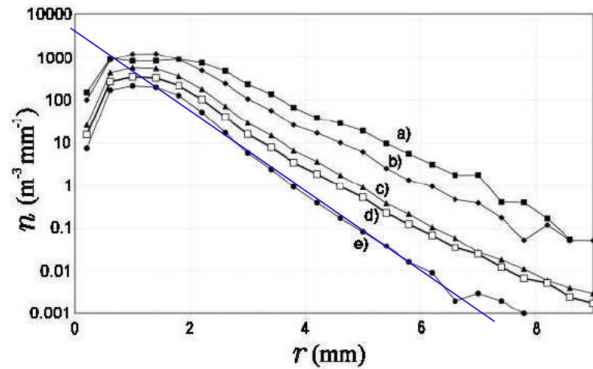
- e) $m(r) = \rho_e \frac{4\pi}{3} \lambda^3$. Or $8 > \frac{4}{3}$ donc $\langle m \rangle > m(r)$. La masse variant comme le rayon au cube, la contribution des gouttes de plus fort rayon à la masse totale est plus importante. La masse ne varie pas linéairement avec le rayon !

6. a) On remplace \vec{F} par $d\vec{F}$ en changeant N_0 en dN et r_0 en r . Puis on intègre :

$$\vec{F}_D = \int_0^\infty -Q r^3 n(r) dr \vec{e}_y = -Q n_0 \lambda^4 I \vec{e}_y \quad \text{avec} \quad I = \int_0^\infty x^3 e^{-x} dx = 6 \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{F}_D = -6Q N_0 \lambda^3 \vec{e}_y}$$

- b) D'où $\boxed{\varphi = 6}$.

- c) La prise en compte de la distribution du rayon des gouttes augmente la force exercée sur le pare-brise d'un facteur 6, ce qui donne finalement $F_D = 1,6 \times 10^3 \text{ N}$. Cela représente une pression (la surface du pare-brise est de $0,5 \text{ m}^2$) d'environ $3 \times 10^3 \text{ Pa}$. L'effet mécanique de la pluie est environ **10 fois plus faible que celui correspondant au maintien en pression de l'habitacle**.
7. a) L'échelle est log-linéaire. Selon la loi de Marshall-Palmer, les relevés devraient être des droites décroissantes d'équation $\log(n) = \log(n_0) - \frac{r}{\lambda}$. Cela est **bien vérifié pour les rayons supérieurs à 1,5 mm environ**, mais pas pour les faibles rayons.
- b) Le nombre de gouttes par unité de volume est $N_0 = \int_0^\infty n(r)dr$. Donc l'aire sous la courbe est d'autant plus petite que le régime de précipitation est faible. Le régime le plus faible est donc représenté par **la courbe la plus basse dans le graphe, à savoir la e)**.
On détermine graphiquement l'équation de la droite (cf ci-dessous) : $\log(n) = b - ar$ avec $b = \log(n_0)$ et $a = \frac{1}{\lambda}$ en mm^{-1} . On trouve $n_0 \approx 4 \times 10^3 \text{ gouttes.m}^{-3}.\text{mm}^{-1}$ et $\lambda \approx 1 \text{ mm}$.



- c) On en déduit le rayon moyen $\langle r \rangle = \lambda \approx 1 \text{ mm}$, et le nombre total de gouttes par unité de volume $N_0 = n_0 \lambda \approx 4 \times 10^3 \text{ gouttes.m}^{-3}$. C'est une pluie 4 fois moins intense que celle considérée au début (question 1.c)).
- d) L'erreur porte sur les petits rayons dans la loi $n(r)$. L'intégration pour le calcul de N_0 , de $\langle r \rangle$ et de \vec{F}_D porte respectivement sur $n(r)$, sur $r.n(r)$ et sur $r^3.n(r)$. **C'est donc la troisième intégration, soit \vec{F}_D , qui est la moins sensible aux erreurs sur les petits rayons** car r^3 tend plus vite vers 0 que r et que 1.

II. Étude d'un compresseur à CO₂ (d'après CCP TSI 2015)

II.1. Effet d'un unique piston

1. $A \rightarrow B$: Le piston recule par rapport aux clapets, le clapet d'admission est ouvert, le clapet d'échappement est fermé.
 $B \rightarrow C$: Le piston avance vers les clapets, qui sont fermés tous les deux.
 $C \rightarrow D$: Le piston avance vers les clapets. Le clapet d'admission est toujours fermé. Le clapet d'échappement est ouvert.
2. Le gaz est parfait donc d'après la première loi de Joule, $\Delta_{AB}U = mc_v(T_B - T_A)$.
La transformation est isobare avec $P_A = P_B = P_e$, donc $W_{AB} = P_e(V_A - V_B)$. En utilisant la loi des gaz parfaits et $c_p = \gamma c_v$, cela donne $W_{AB} = nR(T_A - T_B) = mc_v(\gamma - 1)(T_A - T_B) = m(c_p - c_v)(T_A - T_B)$.
Le premier principe donne alors $Q_{AB} = \Delta_{AB}U - W_{AB}$, d'où $Q_{AB} = mc_p(T_B - T_A) = \Delta_{AB}H$.

3. De B à C , le gaz subit une compression adiabatique mécaniquement quasi-statique, donc qui vérifie la loi de Laplace : $P_C^{1-\gamma} T_C^\gamma = P_B^{1-\gamma} T_B^\gamma$, d'où $T_C = T_B x^{1-\frac{1}{\gamma}}$ avec $x = \frac{P_c}{P_e}$.
4. Le premier principe pour une transformation adiabatique d'un gaz parfait donne ici $W_{BC} = \Delta_{BC}U = mc_v(T_C - T_B)$, d'où $W_{BC} = mc_v T_B (x^{1-\frac{1}{\gamma}} - 1)$.
5. Les caractéristiques de la transformation sont les mêmes qu'en ?? . On obtient donc :
 $\Delta_{CD}U = mc_v(T_D - T_C)$, $W_{CD} = m(c_p - c_v)(T_D - T_C)$ et $Q_{CD} = mc_p(T_D - T_C) = \Delta_{CD}H$.
Par ailleurs, comme $V_D = V_A$, on a $T_D = T_A \frac{P_c}{P_e} = T_A x$. On a aussi $T_C = T_B x^{1-\frac{1}{\gamma}}$. Cela conduit à
 $\Delta_{CD}U = mc_v(T_A x - T_B x^{1-\frac{1}{\gamma}})$, $W_{CD} = m(c_p - c_v)(T_A x - T_B x^{1-\frac{1}{\gamma}})$ et
 $Q_{CD} = mc_p(T_A x - T_B x^{1-\frac{1}{\gamma}}) = \Delta_{CD}H$.
6. $w_{i,BC} = \Delta_{BC}h = c_p(T_C - T_B)$ d'où $w_{i,BC} = c_p T_B (x^{1-\frac{1}{\gamma}} - 1)$.

II.2. Compresseur à deux étages

7. Les lois de Laplace conduisent à $T_E = T_{B'} \left(\frac{P'_s}{P'_e}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} = T_{B'} z_1$ et $T_G = T_F \left(\frac{P_s}{P'_s}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} = T_{B'} z_2$ car $T_F = T_{B'}$.
D'après ??, on aura donc $w_{i,tot} = c_p T_{B'} (z_1 + z_2 - 2)$.
8. En considérant $T_{B'} = T_B$, la différence entre le travail indiqué à 1 et à 2 étages est du signe de la fonction $f_z(z_1) = z - z_1 - \frac{z}{z_1} + 1$, sachant que $z_1 \in [1, z]$. Or $f'_z(z_1) = \frac{z}{z_1^2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow z_1 \leq \sqrt{z}$, donc f_z est croissante puis décroissante avec un maximum en $z_1 = \sqrt{z}$. De plus $f_z(z_1 = 0) = f_z(z_1 = z) = 0$. Donc $f_z(z_1) \geq 0$ sur tout le domaine utile. **Le travail indiqué est donc plus faible pour un compresseur à deux étages. Sa valeur est minimale (optimale) pour $z_1 = \sqrt{z}$ donc $\frac{P'_s}{P_e} = \sqrt{\frac{P_s}{P_e}}$.**
9. On a $z_2 < z$, donc $T_G = T_{B'} z_2 < T_{B'} z = T_C$.
Il est préférable de travailler avec des températures plus basses pour la sécurité et la durabilité du matériel (vieillessement).