THERMODYNAMIQUE

Ce devoir comporte 2 parties totalement indépendantes, à traiter sur des copies séparées.

CALCULATRICES AUTORISÉES

I. Impact mécanique de la pluie sur un pare-brise d'avion

Notations et données :

Accélération de la pesanteur : $g = 9,81\,\text{m.s}^{-2}$
Masse volumique de l'air : $\rho_a = 1,20\,\text{kg.m}^{-3}$
Masse volumique de l'eau : $\rho_e = 998\,\text{kg.m}^{-3}$

Nous nous proposons d'étudier l'effet mécanique de la pluie sur un pare-brise. Une goutte est assimilée à une sphère de rayon r. Sa vitesse, par rapport au référentiel terrestre $\mathcal{R}_0 = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ considéré galiléen, est notée $\vec{u} = u\,\vec{e}_x$ où $\vec{e}_x = \frac{\vec{g}}{g}$. Dans tout le problème on considèrera qu'en raison des frottements de l'air, la vitesse des gouttes est constante.

I.1. Effort mécanique

Nous souhaitons estimer la force qu'exerce la pluie sur le pare-brise d'un avion. Le pare-brise est modélisé par une surface S rectangulaire de hauteur $h = 0,5\,\text{m}$ et de largeur $\ell = 1\,\text{m}$, inclinée d'un angle $\alpha = 45°$ sur la direction horizontale (figure ci-contre). Nous considérerons que, lorsque qu'une goutte heurte le pare-brise, sa quantité de mouvement, relativement à un repère lié à l'avion, s'annule.

L'intensité I caractérisant une précipitation est mesurée par la hauteur d'eau recueillie au sol, par unité de temps. Pour les applications numériques, nous adopterons $I = 300\,\text{mm.h}^{-1}$ (pluie extrême, sur une courte durée).

Dans cette sous-partie, nous supposons que les gouttes de pluie ont toutes le même rayon $r_0 = 0,5\,\text{mm}$. Nous notons N_0 leur nombre par unité de volume (d'atmosphère).

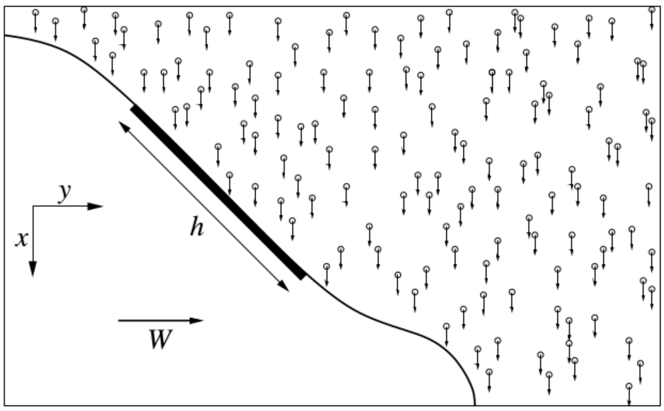


Schéma de profil du nez d'un avion progressant, sous la pluie, à la vitesse $\vec{W} = W\,\vec{e}_y$. Le pare-brise apparaît en trait plein épais.

1. **a)** Sur la base de sa propre expérience, proposer un ordre de grandeur de la vitesse de chute u d'une goutte d'eau de pluie.
   b) Exprimer N_0 en fonction de u, r_0 et de l'intensité I.
   c) Calculer la valeur numérique de N_0.
   d) En déduire la distance moyenne d_0 entre les gouttes de pluie.
2. Nous considérons d'abord le cas d'un avion immobile sur l'aérodrome.
   a) Représenter, sur un schéma, le domaine de précipitation (atmosphère et gouttes) intercepté par le pare-brise entre les instants t et $t + \text{d}t$.
   b) Exprimer la force $\vec{F_0}$ exercée par la pluie sur le pare-brise. Vérifier que son module s'écrit sous la forme :
   $$F_0 = (k\cos\alpha)S\rho_e u^2\,.$$
   Expliciter la dépendance du facteur k avec N_0 et r_0. Préciser sa dimension.

c) Calculer l'intensité de cette force. Commenter.

3. Nous considérons maintenant un avion volant à la vitesse $\overrightarrow{W} = W\,\vec{e}_y$.

a) Donner un ordre de grandeur de W pour un avion de ligne.

b) On rappelle que la loi de composition des mouvements pour les changements de référentiel implique que la vitesse des gouttes perçue dans le référentiel de l'avion s'écrit :

$$\vec{u}\,' = \vec{u} - \overrightarrow{W}\,.$$

En se plaçant dans le référentiel lié à l'avion, représenter, sur un schéma, le domaine de précipitation (atmosphère et gouttes) intercepté par le pare-brise, entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$. On considérera les ordres de grandeur en jeu.

c) En déduire l'expression de la force $\vec{F}$ exercée par la pluie sur le pare-brise.

d) Évaluer l'ordre de grandeur de la force correspondante.

I.2. Distribution du rayon des gouttes

En réalité, les gouttes de pluie n'ont pas toutes la même taille. Le nombre dN de gouttes, par unité de volume (atmosphérique), dont le rayon est compris entre r et $r + \mathrm{d}r$ suit sensiblement la loi de Marshall-Palmer :

$$\mathrm{d}N = n(r)\,\mathrm{d}r = n_0\,e^{-\frac{r}{\lambda}}\,\mathrm{d}r\,, \tag{1}$$

où n_0 et λ sont les paramètres (constants) de la distribution.
La différentielle $\mathrm{d}P(r) = \frac{\mathrm{d}N}{N_0}$, où N_0 représente le nombre total de gouttes par unité de volume, s'interprète comme la probabilité élémentaire que le rayon d'une goutte appartienne à l'intervalle $[r, r + \mathrm{d}r]$.

4. Quelques propriétés de la distribution de rayon.

a) Exprimer N_0 en fonction de n_0 et λ.

b) Exprimer, sous la forme d'une intégrale sur $n(r)$, les probabilités $\mathcal{P}(r \leq \lambda)$ et $\mathcal{P}(r > \lambda)$ que le rayon d'une goutte choisie aléatoirement soit, respectivement, inférieur ou supérieur à λ. Calculer ces probabilités et les comparer. Interpréter ce résultat.

c) Exprimer le rayon moyen $< r >$ des gouttes. Mettre ce résultat en perspective du précédent.

5. Nous définissons la grandeur différentielle suivante :

$$\mathrm{d}M(r) = \rho_e\,\frac{4\pi}{3}\,r^3\,n(r)\,\mathrm{d}r\,.$$

a) Donner sa signification physique.

b) Esquisser l'allure graphique de la grandeur $\mu(r) = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}r}$.

c) Préciser le rayon des gouttes dont la contribution à la masse totale (par unité de volume) est la plus importante.

d) Exprimer la masse moyenne $< m >$ des gouttes.

e) Commenter la comparaison de $< m >$ à la masse d'une goutte de rayon $< r >$.

6. L'expression de la force obtenue à la question **3.c)** s'écrit sous la forme :

$$\vec{F} = -Q\,N_0\,r_0^3\vec{e}_y\,,$$

où le facteur Q est indépendant de N_0 et r_0.

a) Exprimer la force $\vec{F}_D$ exercée par la pluie sur le pare-brise, pour la distribution (1).

b) Exprimer le rapport $\varphi = |\vec{F}_D|/|\vec{F}|$ pour un nombre total N_0 de gouttes par unité de volume fixé et pour $< r >= r_0$.

c) Conclure sur l'effet mécanique de la pluie. Le comparer à celui correspondant au maintien en pression de l'habitacle de l'avion.

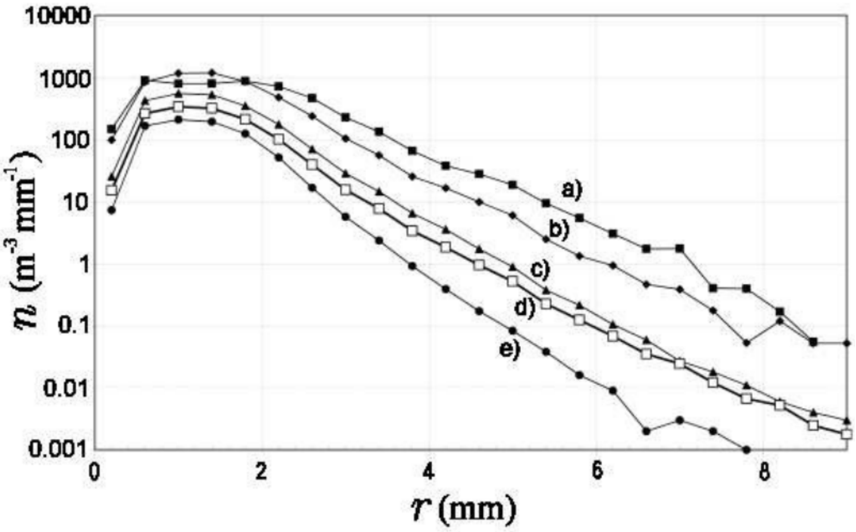
7. La figure ci-dessous présente des relevés météorologiques de la distribution du rayon des gouttes.

a) Comparer ces données à leur modélisation par la loi de Marshall-Palmer.

b) Pour le plus faible régime de précipitation, que l'on désignera en justifiant sa sélection, déduire de la figure ci-dessous les valeurs (approximatives) de n_0 et de λ.

c) Dans ce même régime, donner la valeur numérique du rayon moyen $< r >$ et celle du nombre total N_0 de gouttes par unité de volume. Commenter ce dernier résultat.

d) Parmi les relations exprimant le nombre total de gouttes N_0 par unité de volume, leur rayon moyen $< r >$ et la force $\vec{F}$ exercée sur le pare-brise, obtenues en s'appuyant sur la loi de Marshall-Palmer, quelle est celle qui souffre le moins de l'écart de cette loi aux relevés météorologiques ? Cette réponse doit être argumentée.



II. Étude d'un compresseur à CO_2

Pour limiter les rejets de CO_2 dans l'atmosphère, une des solutions consiste à capter directement le CO_2 à la sortie de l'usine et lui faire subir une suite de compressions successives. On le stocke à 800 m sous terre où le gaz est généralement en phase liquide ou supercritique. Une des possibilités pour comprimer le CO_2 est d'utiliser un compresseur à pistons.

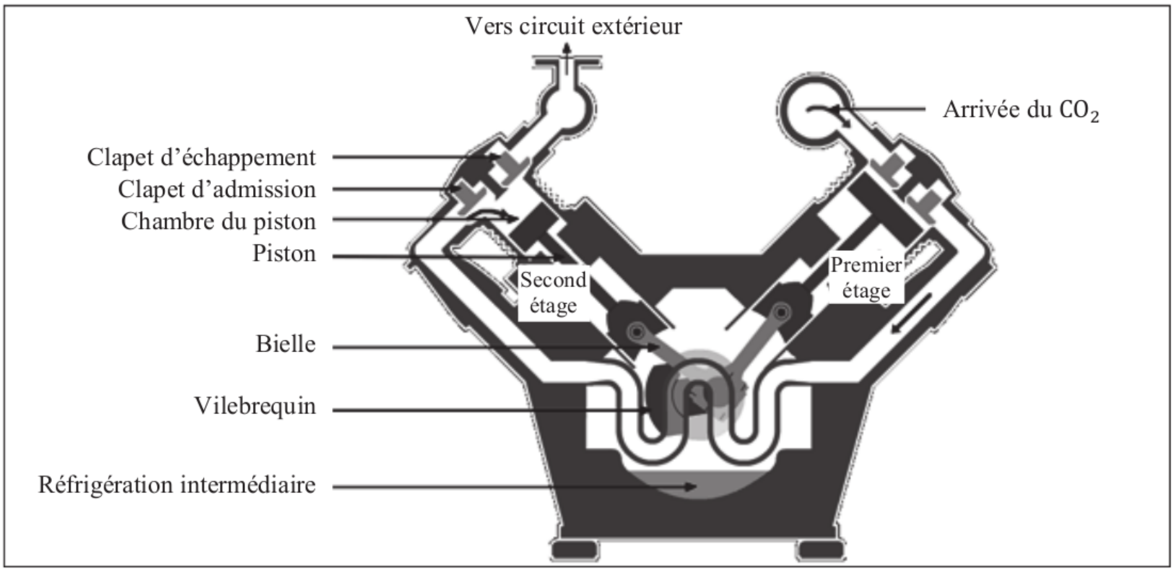


Schéma d'un compresseur multi-étages à double effet à pistons.

Un compresseur est un système actionné par un moteur et destiné à augmenter la pression d'un fluide. Dans un compresseur à pistons, chaque piston est animé d'un mouvement alternatif dans un cylindre au moyen d'une bielle et d'un vilebrequin. Lors de l'aller, le piston aspire le fluide à une certaine pression puis le compresse de façon adiabatique. Pour cela, chaque piston est muni d'une entrée et d'une sortie à clapet anti-retour.

Ces clapets autorisent le passage du CO_2 dans un seul sens :

- le clapet d'admission ne peut laisser passer le fluide que vers la chambre du piston : il est fermé lorsque la pression P dans la chambre (supposée uniforme à l'intérieur de la chambre) est supérieure à la pression d'entrée en amont (supposée uniforme et constamment égale à P_e) ;
- à l'inverse, le clapet d'échappement ne peut laisser passer le fluide que vers le circuit extérieur : il ne s'ouvre que lorsque la pression P à l'intérieur de la chambre du piston devient supérieure à la presion de sortie notée P_s.

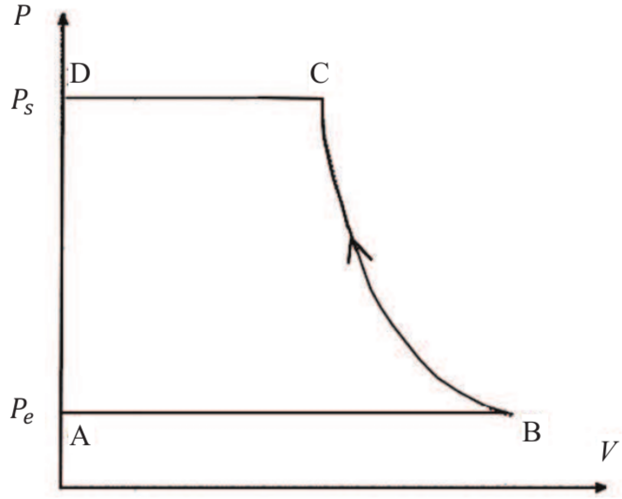
Les approximations retenues pour cette étude sont volontairement simplificatrices :

- durant tout l'étude, le CO_2 est assimilé à un gaz parfait ;
- le CO_2 subit des transformations qui sont supposées mécaniquement quasi-statiques ;
- la température du CO_2 dans la chambre en fin d'aspiration est supposée connue et notée T_B ; de même les pressions P_e et P_s sont supposées connues ;
- les chambres de chaque piston sont supposées parfaitement calorifugées.

On note γ le coefficient adiabatique du CO_2, c_p sa capacité thermique massique à pression constante et c_v sa capacité thermique massique à volume constant.

II.1. Effet d'un unique piston

Dans un premier temps, on ne s'intéresse qu'à un seul des pistons du compresseur. Les frottements du piston sur le cylindre sont négligés. On suppose la pression de sortie P_s constante. On donne l'allure du cycle du compresseur dans le diagramme (P, V) ci-contre, qui représente l'évolution de la pression P d'une masse de gaz dans la chambre en fonction de son volume V au cours de sa traversée depuis l'entrée jusqu'à la sortie [a].



Cycle simplifié d'un piston.

1. On considère les 3 étapes de la transformation : A $\to$ B, B $\to$ C, C $\to$ D. Préciser pour chaque étape la position de chaque clapet ainsi que le mouvement du piston.

[a] Il ne s'agit pas d'un cycle proprement dit pour le système gaz car celui-ci termine dans un état D différent de l'état initiale A. C'est le mécanisme du compresseur qui effectue des cycles.

Dans la suite on s'intéresse à l'évolution d'une masse m de CO_2 évoluant entre les états A et D.

2. Pour la transformation A $\to$ B, exprimer tous les termes du premier principe en fonction des températures T_A et T_B et des constantes nécessaires : variation d'énergie interne $\Delta_{AB}U$, travail W_{AB}, et transfert thermique Q_{AB}. Exprimer de même la variation d'enthalpie $\Delta_{AB}H$.
On négligera les variations des énergies potentielle et cinétique macroscopiques.

3. Montrer que
$$T_C = T_B.x^{1-\frac{1}{\gamma}} \quad \text{avec} \quad x = \frac{P_s}{P_e}\,.$$

4. En déduire l'expression du travail W_{BC} reçu par le système au cours de cette transformation, en fonction de T_B, de x et des constantes nécessaires.

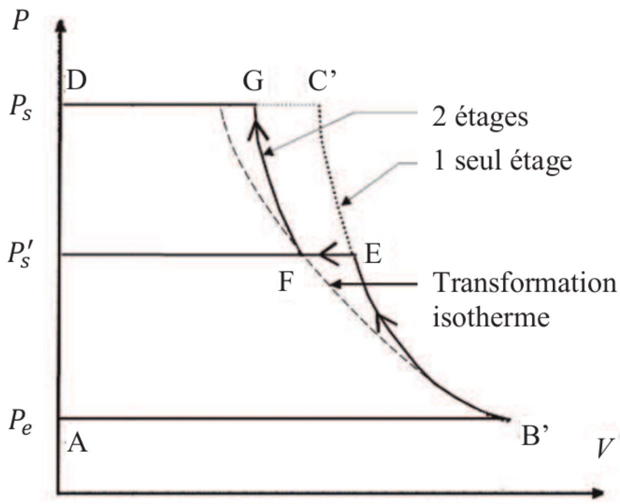
5. Comme dans la question **2.**, exprimer pour la transformation C $\to$ D, tous les termes du premier principe et la variation d'enthalpie en fonction des températures T_C et T_D et des constantes nécessaires, puis en fonction T_A, T_B, x, et des constantes nécessaires.

6. Pour un fluide en écoulement dans un compresseur (plus généralement dans toute machine thermique), on peut montrer que le travail dit *utile* ou *indiqué* effectivement consommé par la machine pour la compression se réduit à la variation d'enthalpie [1]. En déduire le travail indiqué massique $w_{i\,BC}$ pour la compression en fonction de T_B, de x et des constantes nécessaires.

1. Ceci est du à l'action du fluide en amont et en aval, qui contribue au travail total.

II.2. Compresseur à deux étages

On s'intéresse dans un second temps aux deux pistons du compresseur multi-étage. Le piston de droite comprime une première fois le CO_2 qui est ensuite refroidi de manière isobare puis de nouveau comprimé par le piston de gauche. Le cycle du compresseur dans le diagramme (P, V) s'en trouve modifié comme représenté ci-contre.
L'accroissement du nombre d'étages avec refroidissement intermédiaire permet de se rapprocher d'une compression isotherme, représentée en pointillés sur la figure ci-contre.



7. En s'appuyant sur la question **6.**, exprimer le travail indiqué massique total $w_{i\,\text{tot}} = w_{i\,B'E} + w_{i\,FG}$ en fonction de la température $T_{B'}$, des rapports $\frac{P_s'}{P_e}$ et $\frac{P_s}{P_s'}$ et des constantes nécessaires.

8. Montrer que ce travail indiqué est inférieur à celui que l'on trouverait dans un compresseur à un seul étage (un seul piston) pour un même taux global de compression $x = \frac{P_s}{P_e}$.

On pourra travailler avec les variables $z = x^{1-\frac{1}{\gamma}}$, $z_1 = \left(\frac{P_s'}{P_e}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}$ et $z_2 = \left(\frac{P_s}{P_s'}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}$, en notant que $z = z_1 z_2$.

Quelle valeur optimale doit prendre le rapport $\frac{P_s'}{P_e}$ en fonction de x pour que ce travail soit minimal ?

9. Montrer que la température de sortie T_G du compresseur à deux étages est plus faible que la température de sortie $T_{C'}$ du compresseur à un seul étage. Quel en est l'avantage ?

* * * Fin de l'épreuve * * *