MÉCANIQUE

I. Variations d'intensité du champ de pesanteur *(d'après CCP TSI 2010)*

Pendule sans ressort de rappel

1. Le pendule n'est soumis qu'à son poids et à l'action du pivot parfait (de moment nul par rapport à (Oz)). On applique le TMC scalaire selon l'axe (Oz), au $\{pendule\}$, dans le référentiel terrestre considéré galiléen. Le poids admet le centre de masse G comme point d'application, d'où :

$$J\ddot{\theta} = 0 - mga\sin\theta \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{mga}{J}\sin\theta = 0}$$

Aux petites oscillations au voisinage de 0, $\sin\theta \simeq \theta$ et l'équation différentielle devient :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{mga}{J}\theta = 0} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}}.$$

2. Lorsque g varie de $\mathrm{d}g$, T varie de $\mathrm{d}T$. On obtient [1] :

$$\mathrm{d}T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{ma}}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{\mathrm{d}g}{g^{3/2}} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}T = -\frac{T}{2g}\mathrm{d}g \quad\Rightarrow\quad \Delta T = -T\frac{\Delta g}{2g} \quad\Rightarrow\quad \boxed{s = \frac{\Delta T}{T} = -\frac{\Delta g}{2g}}.$$

Pendule avec ressort spiral de rappel

3. On déterminer le travail élémentaire associé au couple Γ pour le pendule en rotation autour de l'axe (Oz) :

$$\delta W = \mathcal{P}\,\mathrm{d}t = \Gamma\dot{\theta}\,\mathrm{d}t = -K\theta\mathrm{d}\theta = -d\left(\frac{1}{2}K\theta^2\right) \Rightarrow \boxed{E_{p,r} = \frac{1}{2}K\theta^2}$$

Le travail est bien indépendant du chemin suivi et on peut donc écrire l'énergie potentielle du couple de rappel, en prenant la référence $E_{p,r} = 0$ pour $\theta = 0$.

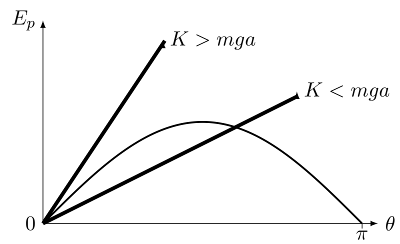
4. La seule autre force s'exerçant sur le pendule est son poids, force conservative dont l'énergie potentielle s'écrit, en gardant la même référence d'énergie potentielle :

$$E_{p,p} = mga(\cos\theta - 1) \Rightarrow \boxed{E_p = \frac{1}{2}K\theta^2 + mga(\cos\theta - 1)}$$

5. Les positions d'équilibre sont ici les solutions de $\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\theta} = 0$ car le moment résultant par rapport à Oz vérifie $\mathcal{M}^z = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\theta}$. Il faut donc satisfaire l'équation :

$$\boxed{K\theta = mga\sin\theta}, \quad \text{dont} \quad \boxed{\theta = 0}$$

est une solution évidente. Les solutions sur $[0, \pi]$ sont illustrées ci-contre ($mga\sin\theta$ en trait fin et $K\theta$ en trait épais), celles sur $[-\pi, 0]$ s'obtiennent par parité de la fonction $E_p(\theta)$. On voit qu'**il existe 3 positions d'équilibre si** $K < mga$ (dont deux symétriques et $\theta = 0$), **sinon seule** $\theta = 0$ **est possible si** $K \geq mga$.



1. On peut aussi utiliser directement la différentielle logarithmique : $ln(T) = ln\left(2\pi\sqrt{\frac{J}{ma}}\right) - \frac{1}{2}\ln(g) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}T}{T} = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}g}{g}$

6. $\theta = 0$ est une position d'équilibre stable si c'est un minimum d'énergie potentielle. Or $\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta = 0) = K - mga$, donc c'est un minimum si $K > mga$. De plus si $K = mga$, on a $\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\theta} = K(\theta - \sin\theta) > 0$ (< 0) si $\theta > 0$ (respectivement si $\theta < 0$) donc $\theta = 0$ est encore un minimum local.
Finalement, **l'équilibre est stable si et seulement si** $\boxed{K \geq mga}$. Ainsi, la constante de rappel du ressort spiral doit être suffisamment forte pour contrer l'effet de la pesanteur.

7. On complète l'énergie potentielle par l'énergie cinétique du pendule :

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}K\theta^2 + mga(\cos\theta - 1)}.$$

Le système étant conservatif (seul le poids et le couple de torsion travaillent), on a conservation de l'énergie mécanique :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 = J\dot{\theta}\ddot{\theta} + K\theta\dot{\theta} - mga\dot{\theta}\sin\theta$$

En simplifiant par $\dot{\theta}$ on a alors l'équation du mouvement :

$$\boxed{J\ddot{\theta} + K\theta - mga\sin\theta = 0}.$$

8. Aux petits angles, au voisinage de $\theta = 0$, l'équation différentielle devient à l'ordre 1

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{K - mga}{J}\theta = 0}.$$

Il s'agit bien d'une équation harmonique tant que $K > mga$, donnant des oscillations stables autour de $\theta = 0$. La période (propre) de ces oscillations s'écrit :

$$\boxed{T' = 2\pi\sqrt{\frac{J}{K - mga}}}.$$

Notons que si $K = mga$, il faut développer à l'ordre 3, l'équation n'est alors plus harmonique et les oscillations ne sont plus isochrones.

9. Calculons [2] $\mathrm{d}T'$:

$$\mathrm{d}T' = 2\pi\sqrt{J}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{-ma\mathrm{d}g}{(K - mga)^{3/2}} = T'\frac{ma}{2(K - mga)}\mathrm{d}g$$

Ainsi on obtient :

$$\boxed{s' = \frac{\Delta T'}{T'} = \frac{ma}{2(K - mga)}\Delta g}$$

10. On veut $|s'| > |s|$, c'est-à-dire

$$\left|\frac{s'}{s}\right| > 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{mga}{(K - mga)} > 1 \quad\Leftrightarrow\quad mga > K - mga$$

Compte tenu de la condition sur K déjà exprimée pour la stabilité de la position d'équilibre $\theta = 0$, il vient alors la condition sur la raideur du ressort spiral :

$$\boxed{mga < K < 2mga}.$$

Plus la raideur K sera prise proche de mga, plus la sensibilité sur pendule avec ressort spiral sera importante.

2. Là encore on peut utiliser avantageusement la différentielle logarithmique : $\frac{\mathrm{d}T'}{T'} = -\frac{1}{2}\frac{-ma\mathrm{d}g}{K - mga} = \frac{ma}{2(K - mga)}\mathrm{d}g$

II. Rosetta : une mission hors normes *(d'après E3A MP 2015)*

1. Par définition de la masse volumique : $m_{\rm com} = \mu_{\rm com} \times \left(\frac{4}{3}\pi r_{\rm com}^3\right) \Rightarrow \boxed{r_{\rm com} = \left(\frac{3m_{\rm com}}{4\pi\mu_{\rm com}}\right)^{1/3}} = \underline{1,8\,\text{km}}$.

II.1. Trajectoire de Philae

2. Le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) appliqué à Philae, dans le référentiel $\mathcal{R}$ supposé galiléen, projeté selon $\overrightarrow{e_r}$ donne

$$m_{\rm ph}\ddot{r} = -\mathcal{G}\frac{m_{\rm ph}m_{\rm com}}{r^2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\ddot{r} + \mathcal{G}\frac{m_{\rm com}}{r^2} = 0}$$

3.
- ⋄ La vitesse initiale nulle correspond à la trajectoire (a). Le temps de chute serait alors de $\underline{145 \times 10^3\,\text{s} \simeq 40\,\text{h}\,17\,\text{min} = 1\,\text{jour}\,16\,\text{h}\,17\,\text{min}}$.
- ⋄ Une chute d'environ 7 heures$= 25,2 \times 10^3$ s à la distance $r = r_{\rm com}$ correspond à la trajectoire (f). La vitesse initiale de Philae était donc de l'ordre de $\underline{v_0 = -0,75\,\text{m.s}^{-1}}$.

4. On trouve la vitesse d'impact sur la comète en lisant sur le graphe la valeur de $\dot{r}$ à $r = r_{\rm com} = 1,8$ km pour une trajectoire de vitesse à l'altitude de largage $v_0 = -0,75\,\text{m.s}^{-1}$. On obtient $\boxed{v_c = -1,1\,\text{m.s}^{-1}}$.

5. Déterminons le travail élémentaire de la force d'interaction gravitationnelle :

$$\delta W = -\mathcal{G}\frac{mm_{com}}{r^2}\vec{e}_r \cdot (\text{d}r\vec{e}_r + r\text{d}\vec{e}_r) = -\mathcal{G}\frac{mm_{com}}{r^2}\text{d}r = -\text{d}\left(-\mathcal{G}\frac{mm_{com}}{r}\right) = -\text{d}E_{p_{\rm com}}$$

Ainsi, en prenant la référence d'énergie potentielle de l'énoncé, il vient :

$$\boxed{E_{p_{\rm com}} = -\mathcal{G}\frac{mm_{com}}{r}}.$$

6. Philae n'est soumis qu'à l'interaction gravitationnelle de la planète, force conservative. Ainsi, l'**énergie mécanique de Philae reste constante lors de sa chute**. En appliquant la conservation de cette énergie mécanique entre l'instant initial de largage et l'instant de contact avec la comète, il vient :

$$\frac{1}{2}m_{\rm ph}v_c^2 - \mathcal{G}\frac{m_{\rm ph}m_{\rm com}}{r_{\rm com}} = \frac{1}{2}m_{\rm ph}v_0^2 - \mathcal{G}\frac{m_{\rm ph}m_{\rm com}}{r_{\rm larg}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_c = -\sqrt{v_0^2 + 2\mathcal{G}m_{\rm com}\left(\frac{1}{r_{\rm com}} - \frac{1}{r_{\rm larg}}\right)}} = \underline{-1,1\,\text{m.s}^{-1}}.$$

Ce résultat est en accord avec celui donné par la simulation numérique.

II.2. Philae à la surface de la comète

7. Cette expression est erronée puisque la masse est invariante par changement de référentiel galiléen. C'est le champ de pesanteur $g_{\rm com}$ qui est plus faible que le champ terrestre $g_{\rm terr}$, de telle sorte que la force de pesanteur subie par Philae correspond à celle que subirait à la surface de la Terre une masse effective

$$\boxed{m_{\rm eff} = m_{\rm ph}\frac{g_{\rm com}}{g_{\rm terr}}} = \underline{1,7\,\text{g}}.$$

II.3. Rosetta autour de la comète

8. On applique le PFD à la sonde Rosetta, en mouvement circulaire dans le référentiel cométocentrique, à l'aide des coordonnées polaires (r, θ) :

$$\begin{cases} -m_{\rm ros}r\dot{\theta}^2 & = -\mathcal{G}\frac{m_{\rm ros}m_{\rm com}}{r^2} \\ m_{\rm ros}r\ddot{\theta} & = 0 \end{cases}$$

En notant $v = r\dot{\theta}$ la vitesse, la projection selon $\vec{e}_r$ conduit à

$$\frac{v^2}{r} = \mathcal{G}\frac{m_{\rm com}}{r^2} \Rightarrow \boxed{v_1 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}m_{\rm com}}{r_1}}} = \underline{0,15\,\text{m.s}^{-1}}$$

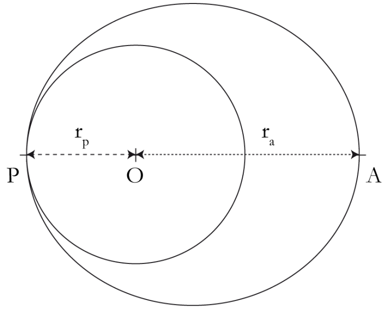
La projection selon $\vec{e}_\theta$ confirme que le mouvement est uniforme ($v =$ constante).

9. La période de révolution de Rosetta autour de la comète est alors telle que $v = \frac{2\pi r}{T}$, d'où :

$$T = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{\mathcal{G}m_{\rm com}}}} = \underline{1,26 \times 10^6\,\text{s} \approx 14\,\text{j}\,15\,\text{h}}.$$

Remarque : on retrouve bien la 3ème loi de Kepler.

10. Trajectoires :



11. L'énergie mécanique E_m de la sonde sur la trajectoire elliptique de grand axe $r_P + r_A$ s'écrit[3] :

$$\boxed{E_m = -\frac{\mathcal{G}m_{\rm ros}m_{\rm com}}{r_a + r_p}}.$$

12. Par conservation de l'énergie mécanique :

$$E_m = -\frac{\mathcal{G}m_{\rm ros}m_{\rm com}}{r_a + r_p} = \frac{1}{2}m_{\rm ros}v_p^2 - \mathcal{G}\frac{m_{\rm ros}m_{\rm com}}{r_p} \Rightarrow \boxed{v_p = \sqrt{2\mathcal{G}m_{\rm com}\left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_a + r_p}\right)}} = \underline{30\,\text{cm.s}^{-1}}$$

13. D'après la question **8.**, sur l'orbite circulaire de rayon r_p, Rosetta doit avoir la vitesse (constante) :

$$\boxed{v_p' = \sqrt{\frac{\mathcal{G}m_{\rm com}}{r_p}}} = \underline{26\,\text{cm.s}^{-1}}$$

Ainsi, la variation de vitesse nécessaire est :

$$\boxed{\Delta v = v_p' - v_p = -4,0\,\text{cm.s}^{-1}}$$

3. L'énoncé ne demande pas explicitement de démontrer ce résultat, toutefois on peut utiliser la démonstration simple du cours en utilisant $\dot{r} = 0$ en A et en P.