BILAN DS8 - MÉCANIQUE

Constat général

- Notes $[1,5;15,8]$, médiane 10,0, moyenne 9,0, écart-type 3,7.
- Le DS était plutôt facile, les copies sont décevantes sachant que c'est le dernier DS de mécanique. Certains conseils répétés plusieurs fois ne sont pas respectés ou assimilés.
- Manque de rigueur encore fréquent dans l'utilisation du formalisme (vecteur ou pas vecteur, écriture d'une différentielle versus une dérivée, d'un moment (par rapport à un point ou un axe).
- La rédaction est souvent expéditive voire télégraphique (acronymes non définis, pas de phrases, hypothèses des théorèmes non détaillées...).
- Manque de réflexion ou d'esprit critique sur les résultats obtenus (notamment les problèmes de signes, cf stabilité dans les équa diff, ou les solutions abusives d'équa diff).

I. Variations d'intensité du champ de pesanteur

Étude du mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe soumis à la pesanteur (mouvement pendulaire) et à un couple de torsion. L'approche repose sur le théorème du moment cinétique et l'approche énergétique. Tout a été fait dans le cours et dans le TD, mis-à-part les calculs de sensibilité par rapport au champ (principe du calcul différentiel déjà rencontré plusieurs fois).

Liaison Pivot et TMC

- Son effet est souvent oublié, ou remplacé par la tension d'un fil (! confusion avec le TRC où on assimile le solide à un point matériel situé en son centre de masse).
- La résultante $\vec{R}$ des actions de contact (système de forces) de l'axe du pivot est non nulle, mais ce n'est pas elle qui nous intéresse pour le TMC, c'est le **moment résultant** des actions de contact : $\vec{\mathcal{M}}(O)_{\text{pivot}}$, ou seulement $\vec{\mathcal{M}}^{Oz}_{\text{pivot}}$ car on utilise le TMC scalaire.
- Il ne faut pas l'écrire $\vec{\mathcal{M}}(O)_{\vec{R}}$ car cela laisse penser qu'on va écrire le moment de la résultante $\vec{R}$... or
- **Le moment résultant n'est en général pas égal au moment de la résultante!!!**[1][2]
- Ainsi on conclut en disant simplement que **par définition, une liaison pivot parfaite est telle que** $\boxed{\vec{\mathcal{M}}^{Oz}_{\text{pivot}} = 0}$.

Énergie potentielle associée au couple de torsion

- Comme je l'ai dit de nombreuses fois, on utilise par abus de langage le mot « couple » pour signifier le moment résultant du couple, car **la résultante dynamique d'un couple est nulle par définition**.
- Il est donc absurde de considérer le couple $\Gamma\vec{u}_z = -K\theta\vec{u}_z$ comme une force... Et puisqu'il s'agit d'un moment résultant, on calcule sa puissance en le multipliant par la vitesse angulaire :

$$\mathcal{P} = \Gamma\vec{u}_z.\dot{\theta}\vec{u}_z \Rightarrow \delta W = \Gamma \mathrm{d}\theta = -K\theta\mathrm{d}\theta = \ldots .$$

- Confusion (ultra classique, je l'ai signalé plusieurs fois) entre la dérivation d l'énergie (potentielle ou mécanique) par rapport au temps et par rapport à la position (ici θ) :
  - si on cherche les positions d'équilibre (puis leur stabilité), on calcule (et on annule) la dérivée de Ep par rapport à la position (ici $\frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}\theta} = 0$).
  - si on cherche l'équation du mouvement, on dérive l'énergie mécanique par rapport au temps :

$$0 = \frac{\mathrm{d}Em}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}.(\text{équation du mouvement})$$

  puis on « simplifie par $\dot{\theta}$ » car $\theta(t)$ n'est « pas identiquement nul » (il est faux d'écrire « car $\dot{\theta} \neq 0$ » car il y a évidemment des instants où $\dot{\theta} = 0$).
- On ne dit pas que « équilibre stable $\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2Ep}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta_{\text{eq}}) > 0$ » car cela n'est qu'une **condition suffisante**. L'équivalence c'est que cela doit être un minimum d'Ep, ce qui est plus large et comprend les situations où $\frac{\mathrm{d}^2Ep}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta_{\text{eq}}) = 0$.
  Par ailleurs la condition ne porte pas sur tout θ, mais seulement sur la valeur d'équilibre θ_{eq}. Ici on avait $\theta_{\text{eq}} = 0$, ce qui donnait

$$\frac{\mathrm{d}^2Ep}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta_{\text{eq}}) = K - mga\cos\theta_{\text{eq}} = K - mga > 0 \Leftrightarrow \boxed{K > mga}.$$

1. C'est comme pour tout le reste, si vous ne comprenez pas cette phrase il faut le dire rapidement car je l'ai déjà répétée un grand nombre de fois.
2. Il y a égalité si on a trouvé un point d'application pour le système de forces, comme définit dans le cours. C'est le cas pour la pesanteur.

La positoin d'équilibre est déterminée par les paramètres physiques du système (pas les conditions initiales du mouvement), donc la condition de stabilité porte aussi uniquement sur ces paramètres.

Équation du pendule et période propre de l'oscillateur harmonique

- On trouve une équation du type $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$.C'est une équation *anharmonique*. On ne peut en déduire une unique période...
- C'est uniquement pour les petites oscillations au voisinage de $\theta = 0$ que l'équation devient harmonique $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$, donc les oscillations isochrones, de période propre $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Sensibilité de T par rapport à g

- On obtient $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mag}}$, beaucoup en déduisent que pour une variation dg de g, on a une variation d$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mad g}}$...
  Tout d'abord ce résultat est absurde car alors : d$T \underset{\mathrm{d}g\to 0}{\longrightarrow} \infty$, ce qui est peu probable... !
  Vous oubliez que vous savez dériver cette fonction :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}g} = -\pi\sqrt{\frac{J}{ma}}\frac{1}{g^{\frac{3}{2}}} \Leftrightarrow \mathrm{d}T = -\pi\sqrt{\frac{J}{ma}}\frac{\mathrm{d}g}{g^{\frac{3}{2}}} = \dots = T\left(-\frac{\mathrm{d}g}{2g}\right).$$

Par ailleurs la méthode de la dérivée logarithmique est ici plus efficace et a été vue plusieurs fois depuis.

II. Rosetta : une mission hors normes

Résolution de l'équation du mouvement du problème newtonien

- Par projection du TRC selon $\vec{e}_r$, on obtient

$$\ddot{r} = -\frac{\mathcal{G}m_{\text{com}}}{r^2}. \qquad (1)$$

- Certain écrivent à la place

$$\ddot{r} = -\frac{\mathcal{G}m_{\text{com}}}{r_{\text{larg}}^2},$$

ce qui n'est valable qu'à l'instant du largage et empêche la force de varier au fur et à mesure que le mobile se rapproche de la comète...

- À la suite de cette équation, voici un raisonnement qu'on trouve fréquemment dans vos copies... pour ceux qui n'ont pas compris ce que signifie « équation du mouvement », expression pourtant définie dans le cours, à savoir *une équa diff d'ordre 2 en une unique coordonnée du mouvement qui suffit à connaître son état...* mais qu'on ne sait pas forcément résoudre !

$$\ddot{r} = -\frac{\mathcal{G}m_{\text{com}}}{r^2} \Rightarrow \dot{r} = -\frac{\mathcal{G}m_{\text{com}}}{r^2}\,t + v_0 \Rightarrow r = -\frac{\mathcal{G}m_{\text{com}}}{2r^2}\,t^2 + v_0\,t + r_0$$

Si ce que vous venez de lire ne vous choque pas, c'est que vous ne réfléchissez pas encore suffisamment à ce que vous écrivez et pratiquez les équations de façon automatique. Réagissez !
Le prof lui réagit ainsi sur votre copie :

HORREUR !

Rappel, la notation « r » signifie la fonction r qui à t associe $r(t)$, qu'on pourrait noter $f(t)$, une fonction inconnue solution de l'équation différentielle (1) ci-dessus. L'enchaînement d'implications ci-dessus suppose donc que r est constante, et aboutit à $r = -\frac{\mathcal{G}m_{\text{com}}}{2r^2}\,t^2 + v_0\,t + r_0$, donc r dépend ... de r (pourquoi pas ça se résoud) et surtout dépend du temps t ! Donc l'hypothèse est absurde, et on n'écrit pas cela parce que ça veut dire qu'on a absolument pas compris pourquoi on a passé un chapitre entier à étudier le problème newtonien, que l'on a résolu par une méthode subtile comme par exemple celle de Binet...

Énergie potentielle coulombienne

La sempiternelle question que je pose à chaque DS et à laquelle vous ne savez toujours pas répondre correctement malgré... le cours, et mes multiples corrections au tableau !

$$\vec{F} = -\frac{K}{r^2}\,\vec{u} \quad \text{avec} \quad \vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$$

Montrer que cette force est conservative et en déduire son énergie potentielle...
Je désespère d'obtenir de votre part de savoir reproduire ma démonstration initiale de cette question, et cela n'est pas risible. C'est plutôt inquiétant.

Pour ceux qui ont essayé de la reproduire mais maladroitement, il est absurde de prétendre que « $\vec{u}.\mathrm{d}\vec{u} = 0$ car $\vec{u}$ [serait] constant » (... !)

- d'abord parce que dans ce cas on aurait $\mathrm{d}\vec{u} = \vec{0}$... et ce n'est pas le cas puisque le vecteur $\vec{u}$ (ou $\vec{u}_r$ ou $\vec{e}_r$...) évolue en suivant le mouvement du point M !
- ensuite parce que c'est sa norme qui est constante : $||\vec{u}|| = 1$...