Concours blanc n°1: Correction

I Les disques optiques numériques

I.1 Le CD

Q1. En notant $r_0 = 2,5\,\text{cm}$ et $r_1 = 58\,\text{cm}$ les rayons délimitant la portion d'information sonore, celle-ci occupe une surface $\boxed{S = \pi(r_1^2 - r_0^2)} = \underline{8,6 \times 10^{-3}\,\text{m}^2}$

Q2. Notons $\varepsilon = 1,6\,\mu\text{m}$ l'espacement entre 2 passages successifs sur le même rayon. On découpe toute la piste par la pensée sous la forme d'un ruban de longueur L et de surface S. Or $S \approx \varepsilon L$ car $d \ll r_0 < r_1$ donc le ruban est assimilable à un rectangle. D'où :

$$\boxed{L = \frac{\pi(r_1^2 - r_0^2)}{\varepsilon}} = \underline{5,4\,\text{km}}\,.$$

Autre raisonnement possible : On peut assimiler la piste complète à une série de disques (il y en a $N = \frac{(58-25)\times 10^{-3}}{1.6\times 10^{-6}} = 21000$*) dont les rayons sont* $r_n = r_0 + 2dn$ *avec* $r_0 = 25, d = 1.6 \times 10^{-6}\text{m}$ *et* $n \in [\![0, 20000]\!]$*. Il vient :* $L = 2\pi \sum_{n=0}^{N} (r_0 + dn) = 2\pi r_0 N + \pi d N(N-1) = 5.2\text{km}$.

Q3. En notant $v = 1,2\,\text{m.s}^{-1}$ la vitesse linéaire au niveau de la tête de lecture, on obtient $\boxed{\Delta t = \frac{L}{v}} = \underline{4,5 \times 10^3\,\text{s} = 75\,\text{min}}$. Le résultat est cohérent.

Avec l'autre méthode, on trouve plutôt 72min.

I.2 Traitement numérique du signal

Q4. Pour un fréquence d'échantillonnage $f_e = 44,1\,\text{kHz}$, l'information sonore de durée totale Δt est représentée par $N = f_e \Delta t$ échantillons. Chaque échantillon correspond à 1 nombre sur 16 bits pour chacun des deux canaux, donc à $2 \times 16/8 = 4\,\text{octets}$, L'information occupe donc une taille $\boxed{I = 4 f_e \Delta t} = \underline{791\,\text{Mo}}$.

I.3 Principe de la lecture des CD, DVD et Blu-ray

Q5. En négligeant les aberrations géométriques dues au caractère astigmatique de la lentille (qui peut être plus où moins bien corrigé), il reste que le diaphragme d'ouverture de la diode laser produit un phénomène de **diffraction** inéluctable et le point image est finalement une tache d'Airy.

Q6. L'alvéole ayant une largeur $\delta = 0,5\,\mu\text{m}$, la tache de diffraction ne recouvrira qu'une seule ligne si son diamètre est inférieur à $\boxed{D_{\max} = 2\varepsilon - \delta} = \underline{2,7\mu\text{m}}$.

Q7. Le texte donne pour le CD : $\lambda_0 = 780\,\text{nm}$, $n = 1,55$ et $NA = 0,45$. On en déduit $\boxed{d = 1,22\,\frac{\lambda_0}{n \times (NA)}} = \underline{d = 1,4\,\mu\text{m}}$. Ce résultat est en accord avec la question précédente.

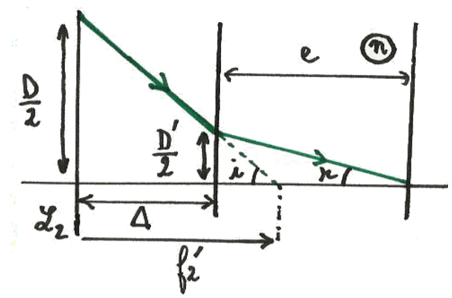
Q8. En adaptant les valeurs de longueur d'onde et d'ouverture numérique, on obtient des taches de diffraction **plus petites** : $\underline{d_{Blu-Ray} = 0,38\mu\text{m}}$ et $\underline{d_{DVD} = 0,85\mu\text{m}}$. On peut donc rapprocher les pistes et **stocker plus d'informations**.

Q9. En inversant la relation : $\boxed{f_2' = \frac{D}{2}\sqrt{\frac{1}{(NA)^2} - 1}} = \underline{2,5\,\text{mm}}$.

Q10. On passe d'un milieu moins réfringent à un milieu plus réfringent donc les rayons vont se rapprocher de la normale. C'est donc la **figure (a)**.

Q11.

Notons D' le diamètre du faisceau à l'entrée de la couche de polycarbonate, i l'angle d'incidence et r l'angle de réfraction dans la couche de polycarbonate (cf figure ci-contre).



On a $\tan i = \frac{D'}{2(f_2' - \Delta)}$ et $\tan r = \frac{D'}{2e}$.
La loi de Descartes impose $\frac{\sin r}{\sin n} = \frac{1}{n}$.
Dans les conditions de Gauss on a $\frac{\tan r}{\tan i} \approx \frac{\sin r}{\sin i}$ d'où $\frac{f_2' - \Delta}{e} \approx \frac{1}{n}$ et donc $\boxed{\Delta = f_2' - \frac{e}{n}}$.

Q12. Le rayon qui se réfléchit sur un plat est en avance de phase car il a parcouru une distance $2h$ supplémentaire, et son nombre d'onde angulaire est $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi n}{\lambda_0}$. Donc $\boxed{\Delta\phi = \frac{4\pi}{\lambda_0} nh}$.

Q13. Il faut $\Delta\phi = (2k+1)\pi$ pour que les interférences soient destructives, avec k **un entier naturel**. donc $h_k = \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda_0}{2n}$, d'où $\boxed{h_{\min} = h_0 = \frac{\lambda_0}{4n}} = \underline{0,126\,\mu\text{m}}$.
Cela correspond donc à une différence de marche égale à un quart de longueur d'onde comme le dit le Doc. 1, ce qui est cohérent avec la condition d'interférence destructives.

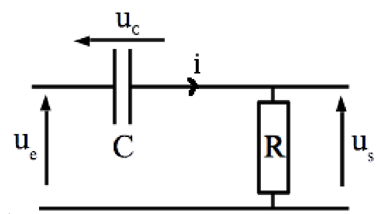
L'intensité minimale mesurée n'est pas nulle car l'intensité des deux faisceaux ne sont pas de même amplitude.

I.4 Détection des “1”

Q14. Le Doc. 1 indique une longueur d'alvéole minimale $\ell = 0,83\,\mu$m. La vitesse linéaire étant v, la durée d'un état bas est au minimum de $\boxed{\Delta t_{\min} = \frac{\ell}{v}} = \underline{0,69\,\mu s}$.

Q15. L'allure proposée suggère que dans chaque état le régime permanent stationnaire atteint est $u_s = 0$. En assimilant le condensateur à un interrupteur ouvert en régime stationnaire, il vient que $u_s = 0$ uniquement pour le **circuit (b)**. C'est celui que l'on choisit.

La loi des mailles s'écrit $u_e = u_c + u_s$ en choisissant les orientations indiquées ci-contre. Donc $u_e = Ri$ et $i = C\,\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$, d'où $\frac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}u_s = \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}t} = 0$ dans chaque état après le passage du front à l'instant t_i.



La solution s'écrit $u_s(t) = u_s(t_i^+).e^{-\frac{t-t_i}{RC}}$. Par continuité de la tension aux bornes du condensateur, et en considérant le régime permanent $u_s(t_i^-) = 0$ atteint, on a $u_c(t_i) = u_e(t_i^-) = 0$ ou U_h selon que le front est respectivement montant ou descendant. On a donc $u_s(t_i^+) = u_e(t_i^+) - u_c(t_i) = +U_h$ ou $-U_h$ respectivement. Finalement $\boxed{u_s(t) = \pm U_h.e^{-\frac{t-t_i}{RC}}}$ pour un état haut (signe $+$) ou bas (signe $-$).

Q16. Le temps caractéristique RC de ce régime transitoire doit vérifier $\boxed{RC \ll \Delta t_{\min}}$ pour que le régime permanent soit bien atteint.

Q17. On impose $|u_s(t_i + \Delta t)| = \frac{U_1}{2} = U_1 e^{-\frac{\Delta t}{RC}}$ d'où $\Delta t = RC\ln 2$, donc $\boxed{C = \frac{\Delta t}{R\ln 2}} = \underline{10\,\text{pF}}$.

Q18. A basse fréquence, le condensateur est assimilable à un interrupteur ouvert. L'intensité circulant dans R_2 puis dans R car $i_- = 0$ est donc nulle. Donc $u_s = V_- = V_+ = 0$.

A haute fréquence, le condensateur est assimilable à un fil. La Loi des Noeuds en Termes de Potentiel (LNTP) au point V_- s'écrit avec $V_- = V_+ = 0$: $\frac{u_e}{R_2} + \frac{u_s}{R} = 0$ donc $u_s = -\frac{R}{R_2}\,u_e =\neq 0$.

Il s'agit donc d'un **filtre passe-haut**, dont le gain à haute fréquence est a priori différent de 1 si $R \neq R_2$.

Q19. On a toujours $V_- = V_+ = 0$. En régime sinusoïdal forcé, la LNTP s'écrit en complexes $\frac{\underline{u_e}}{R_2 + \frac{1}{jC\omega}} + \frac{\underline{u_s}}{R} = 0$, d'où

$$\boxed{\underline{H} = -\frac{jRC\omega}{1 + jR_2C\omega} = -\frac{R}{R_2}\left(1 + \frac{1}{jR_2C\omega}\right)^{-1}}, \quad \text{et}$$

$$\boxed{G(\omega) = \frac{RC\omega}{\sqrt{1 + (R_2C\omega)^2}} = \frac{R}{R_2}\left(1 + \frac{1}{(R_2C\omega)^2}\right)^{-\frac{1}{2}}}.$$

Q20. La pulsation de coupure est définie telle que $G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$. Le gain réel est maximal pour $\omega \to +\infty$ et vaut $\frac{R}{R_2}$. Donc la pulsation de coupure doit vérifier :

$$G(\omega_c) = \frac{R}{\sqrt{2}R_2} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{R_2C\omega_c} = 2 \Leftrightarrow \boxed{\omega_c = \frac{1}{R_2C}}.$$

Q21. On a asymptotiquement $\underline{H} \underset{\omega \ll \omega_c}{\sim} -jRC\omega$ donc $\boxed{u_s(t) \approx -RC\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}t}}$. Il s'agit d'un comportement **pseudo-dérivateur**. C'est ce que l'on recherche ici puisque l'on veut **détecter les fronts**, c'est-à-dire les passages d'un état haut vers un état bas ou l'inverse.

Q22. On a alors $U_1 = \frac{R}{R_2}U_h$ donc $\boxed{R_2 = \frac{R}{10}} = \underline{1\,\text{k}\Omega}$ et $\boxed{C = \frac{1}{R_2\omega_c}} = \underline{10\,\text{pF}}$.

II Étude d'un toboggan aquatique

II.1 Étude de la trajectoire sur le toboggan

Q23. a) Le vecteur position s'écrit $\vec{OM} = R\vec{u}_r + z\vec{u}_z$. En dérivant par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ de la piscine, et on obtient $\vec{v} = R\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{z}\,\vec{u}_z$. Comme le contact avec le toboggan impose $z = -p\,\frac{\theta}{2\pi}$, donc $\dot{\theta} = -2\pi\,\frac{\dot{z}}{p}$, on a finalement

$$\boxed{\vec{v} = \dot{z}\left(-2\pi\frac{R}{p}\vec{u}_\theta + \vec{u}_z\right)}.$$

b) Comme $\dot{z} < 0$, on en déduit $\boxed{v = -\dot{z}\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}+1}}$.

Q24. a) En l'absence de frottements, le système est conservatif car la réaction normale ne travaille pas, et la force de pesanteur dérive de l'énergie potentielle $E_p = mgz$. D'après le théorème de l'énergie mécanique dans $\mathcal{R}$ galiléen, l'énergie mécanique

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + mgz = \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{\lambda^2}+1\right)\dot{z}^2 + mgz$$

est constante. On en déduit l'équation du mouvement via

$$\forall t\,,\ \frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0 = m\dot{z}\left(\left(\frac{1}{\lambda^2}+1\right)\ddot{z} + g\right) \implies \boxed{\ddot{z} = -\frac{g}{\frac{1}{\lambda^2}+1}}.$$

b) On intègre deux fois cette équation en appliquant les conditions initiales $z(0) = 0$ et $\dot{z} = 0$, ce qui donne

$$\boxed{z = -\frac{g}{2(\frac{1}{\lambda^2}+1)}\,t^2}.$$

Q25. On calcule de deux manières le produit scalaire :

$$\vec{v}.\vec{u}_\theta = \cos\alpha\,.\,||\vec{v}|| = \cos\alpha\,.\,(-\dot{z})\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}+1} \quad \text{et} \quad \vec{v}.\vec{u}_\theta = -\frac{\dot{z}}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}}.$$

Q26. a) Le dénivelé parcouru vérifie $h_0 - h_1 = \frac{g}{2(\frac{1}{\lambda^2}+1)}\,t_1^2$.

Par ailleurs le nombre de tours vérifie $\theta(t_1) = n\,2\pi = \frac{2\pi}{p}\,(h_0 - h_1)$. On en déduit

$$\boxed{n = \frac{\lambda g t_1^2}{4\pi R(1+\lambda^2)}}.$$

b) On a $n(\lambda) = \frac{g t_1^2}{4\pi R}\,f(\lambda)$ avec $f(\lambda) = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}$. Or $f'(\lambda) \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq 1$, donc n admet un maximum en $\boxed{\lambda = 1}$.

c) Ce maximum vaut $\boxed{n_{\max} = n(\lambda = 1) = \frac{g t_1^2}{8\pi R}} = \underline{7,8}$ et $\boxed{p = 2\pi R} = \underline{31\,\mathrm{m}}$.

d) On en déduit $\boxed{h_0 = h_1 + \frac{g t_1^2}{2(\frac{1}{\lambda^2}+1)} = h_1 + \frac{g t_1^2}{4}} = \underline{245\,\mathrm{m}}$ et

$$\boxed{\alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \underline{45°}.$$

Q27. a) On réutilise les relations précédentes, à savoir $n = \frac{h_0' - h_1}{p}$ donc $\lambda = \frac{h_0' - h_1}{2\pi n R}$. Puis $t_1' = \sqrt{\frac{2(h_0'-h_1)}{g}\left(1+\frac{1}{\lambda^2}\right)}$ d'où

$$\boxed{t_1' = \sqrt{\frac{2(h_0'-h_1)}{g}\left(1+\frac{4\pi^2 n^2 R^2}{(h_0'-h_1)^2}\right)}} = \underline{11,5\,\mathrm{s}}.$$

b)

$$v_B = -\dot{z}(t_1)\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}+1} = \frac{g}{1+\frac{1}{\lambda^2}}\sqrt{\frac{2(h_0'-h_1)}{g}\left(1+\frac{1}{\lambda^2}\right)}\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}+1}$$

$$\text{donc} \quad \boxed{v_B = \sqrt{2g(h_0'-h_1)}} = \underline{14\,\mathrm{m.s^{-1}}}.$$

c) On obtient $\boxed{\alpha' = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{(h_0'-h_1)^2}{4\pi^2 n^2 R^2}}}\right)} = \underline{0,12\,\mathrm{rad}} = \underline{7,0°}$.

II.2 Mouvement de chute libre dans l'air

Q28. Dans l'air, le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) s'écrit dans $\mathcal{R}$ $\ddot{x}'\vec{u}_x + \ddot{z}'\vec{u}_z = -g\vec{u}_z$. On projette puis on intègre depuis l'instant initial t_1'' où la vitesse est $\vec{v}_B$ inclinée d'un angle α' avec l'horizontale, et la position est B de hauteur $z' = h_1$ et d'abscisse $x' = 0$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \ddot{x}' & = & 0 \\ \ddot{z}' & = & -g \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \dot{x}' & = & v_B\,\cos\alpha' \\ \dot{z}' & = & -g(t-t_1'') - v_B\,\sin\alpha' \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x' & = & v_B\,\cos\alpha'\,(t-t_1'') \\ z' & = & -\frac{1}{2}g(t-t_1'')^2 - v_B\,\sin\alpha'\,(t-t_1'') + h_1 \end{array}\right. ,$$

On élimine la variable $t - t_1''$ au profit de x' dans l'équation horaire de z' pour obtenir l'équation intrinsèque de la trajectoire :

$$\boxed{z' = -\frac{g}{2v_B^2\cos^2\alpha'}\,.\,x'^2 - \tan\alpha'\,.\,x' + h_1}.$$

Q29. a) On résoud le trinôme du second degré $z'(x'_C) = 0$ en imposant $x'_C > 0$, ce qui fournit l'unique solution

$$\boxed{x'_C = \frac{v_B^2\sin(2\alpha')}{2g}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2gh_1}{v_B^2\sin^2\alpha'}}\right)} = \underline{1,3\,\mathrm{m}}\,.$$

b) En réutilisant $x'(t)$ on obtient

$$\boxed{\Delta t_2 = \frac{x'_C}{v_B\cos\alpha'} = \frac{v_B\sin\alpha'}{g}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2gh_1}{v_B^2\sin^2\alpha'}}\right)} = \underline{0,17\,\mathrm{s}}\,.$$

Q30. La vitesse vaut $\vec{v}_C = v_B\cos\alpha'\,\vec{u}_x - (g(t_2 - t_1'') + v_B\sin\alpha')\,\vec{u}_z$, donc $\boxed{v_C = \sqrt{(g\Delta t_2 + v_B\sin\alpha')^2 + v_B^2\cos^2\alpha'}} = \underline{8,4\,\mathrm{m.s^{-1}}}$.
Pour trouver l'angle, de nouveau on écrit le produit scalaire de 2 façons :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \vec{v}_C.\vec{u}_x & = & v_C\cos\theta_C \\ & = & v_B\cos\alpha' \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{\theta_C = \arccos\left(\frac{v_B}{v_C}\cos\alpha'\right)} = \underline{0,32\,\mathrm{rad}} = \underline{18°}$$

II.3 Mouvement dans l'eau

Q31. a) Dans le référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, le PFD dans l'eau s'écrit

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left(1 - \frac{1}{d_h}\right)\vec{g} - \frac{1}{\tau}\vec{v}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau = \frac{m}{k}} = \underline{0,2\,\mathrm{s}}\,.$$

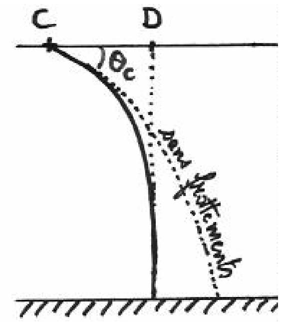
b) L'équation différentielle est du premier ordre linéaire à coefficients constants, avec second membre. La solution particulière correspond au régime permanent constant, et donc à la vitesse limite $\boxed{\vec{v}_\ell = \tau\left(1 - \frac{1}{d_h}\right)\vec{g}}$. En appliquant la condition initiale $\vec{v}(t_2) = \vec{v}_C$, on obtient $\boxed{\vec{v}(t) = \vec{v}_\ell + (\vec{v}_C - \vec{v}_\ell)\,e^{-\frac{t-t_2}{\tau}}}$.

Q32. a) On projette l'équation ci-dessus selon $\vec{u}_x$, puis on intègre avec $x(t_2) = x'_C$:

$$\dot{x}'(t) = v_C\cos\theta_C\,e^{-\frac{t-t_2}{\tau}} \Rightarrow \boxed{x'(t) = x'_C + \tau v_C\cos\theta_C\left(1 - e^{-\frac{t-t_2}{\tau}}\right)}$$

L'abscisse croît en tendant vers une valeur limite :

$$\boxed{x'(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} x'_{\mathrm{lim}} = x'_C + \tau v_C\cos\theta_C} = \underline{2,9\,\mathrm{m}}\,.$$

b) 

II.4 Caractéristiques de l'installation

Q33. On obtient $\boxed{L = \mathrm{E}[x'_{\mathrm{lim}} + S] + 1} = \underline{4\,\mathrm{m}}$.

Q34. La durée totale vaut $\boxed{T = \Delta t + \Delta t_3 + \Delta t_2 + t_1''} = \underline{28\,\mathrm{s}}$.