

# ONDES ET MÉCANIQUE

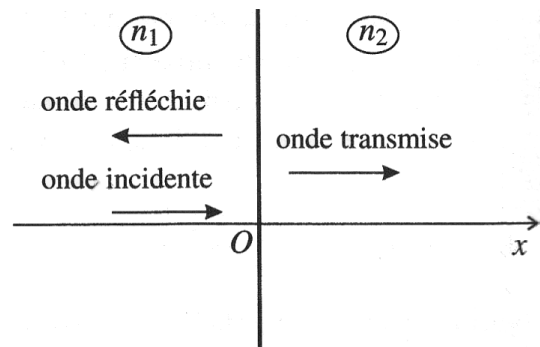
Ce devoir comporte 4 parties totalement indépendantes, à traiter sur des copies séparées.

## CALCULATRICES AUTORISÉES

### I. Couche anti-reflet

#### I.1. Réflexion et transmission

Une onde lumineuse incidente se propageant dans un milieu Linéaire Homogène Isotrope (LHI) transparent d'indice  $n_1$  arrive sur un dioptré plan d'équation  $x = 0$ , frontière avec un milieu LHI transparent d'indice  $n_2$ . Elle donne naissance à une onde réfléchie qui revient dans le milieu d'indice  $n_1$  et une onde transmise qui se propage dans le milieu d'indice  $n_2$ . Les ondes sont synchrones monochromatiques de fréquence  $f$ . Les propagations se font sans déformation ni atténuation. On notera avec les indices  $i$ ,  $r$  et  $t$  les grandeurs relatives respectivement à l'onde incidente, réfléchie et transmise.



- Rappeler les lois de Snell-Descartes de la réflexion et de la réfraction. En déduire la direction de propagation des ondes réfléchie et transmise si l'onde incidente arrive en incidence normale.

**Dans tout le problème, on ne considérera que le cas de l'incidence normale.**

- Les ondes transmise et réfléchie ont-elles la même couleur que l'onde incidente ? Ont-elles la même longueur d'onde ? Exprimer les longueurs d'onde  $\lambda_i$ ,  $\lambda_r$  et  $\lambda_t$  en fonction des données. En déduire les normes des vecteurs d'onde  $k_i$ ,  $k_r$  et  $k_t$ .
- Écrire l'onde incidente en  $s_i(x, t)$ . On prendra une amplitude  $A_i$  et une phase à l'origine  $\varphi_i$ .
- Les équations de Maxwell de l'électromagnétisme permettent de montrer qu'au niveau du dioptré, l'onde réfléchie vérifie :

$$s_r(0, t) = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} s_i(0, t).$$

Exprimer  $s_r(x, t)$  pour  $x$  quelconque. Quelle est l'amplitude  $A_r$  de l'onde réfléchie ? Montrer que la réflexion s'accompagne d'un déphasage de  $\pi$  si  $n_1 < n_2$  et ne modifie pas la phase si  $n_1 > n_2$ .

- On définit le *facteur de réflexion*  $R$  comme le rapport entre l'éclairement<sup>1</sup>  $\mathcal{P}_r$  porté par l'onde réfléchie et l'éclairement  $\mathcal{P}_i$  porté par l'onde incidente. Étant donné que l'éclairement est proportionnel à la moyenne du carré de la fonction d'onde  $s$  (qui représente le champ électrique), donner l'expression de  $R$  en fonction de  $n_1$  et  $n_2$ .
- De même, le *facteur de transmission*  $T$  est la fraction de l'éclairement porté par l'onde incidente emportée par l'onde transmise. Les calculs conduisent à

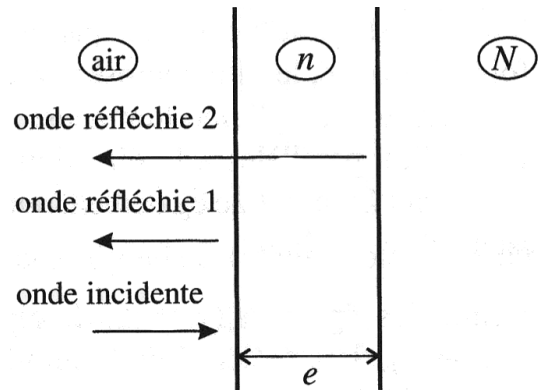
$$T = \frac{\mathcal{P}_t}{\mathcal{P}_i} = \frac{4n_1n_2}{(n_1 + n_2)^2}.$$

- Que vaut  $R + T$  ? Commenter.
- Calculer  $R$  et  $T$  dans le cas d'une lumière se propageant dans l'air et qui se réfléchit sur un verre d'indice  $N = 1,52$ .
- Un automobiliste qui conduit avec le soleil dans son dos porte des verres de lunettes ayant cet indice. L'éclairement venant du soleil est 10 fois plus puissant que celui venant du paysage (de puissance notée  $\mathcal{P}$ ). Calculer le rapport des puissances lumineuses entrant dans l'œil de l'automobiliste provenant du soleil et du paysage. Conclure.

1. flux d'énergie par unité de surface.

## I.2. Mise au point de la couche anti-reflet

Le système de la couche antireflet permet de réduire fortement le pourcentage du flux lumineux réfléchi. On recouvre la surface de verre d'indice  $N$  par une couche d'indice  $n < N$  et d'épaisseur  $e$ . On utilise le phénomène d'interférence entre l'onde qui est réfléchi sur le dioptre air-milieu d'indice  $n$  (onde réfléchi 1) et l'onde qui est réfléchi sur le dioptre milieu d'indice  $n$  - verre d'indice  $N$  (onde réfléchi 2). On suppose la lumière monochromatique de longueur d'onde dans le vide  $\lambda$ .



10. Sachant que la transmission ne s'accompagne d'aucun déphasage, exprimer le retard  $\tau$  de l'onde réfléchi 2 par rapport à l'onde réfléchi 1 en un point de l'air où elles interfèrent. En déduire le déphasage  $\Delta\varphi$  de l'onde 1 par rapport à l'onde 2, en fonction de  $e$ ,  $n$  et  $\lambda$  uniquement.
11. En déduire quelles sont les valeurs de l'épaisseur  $e$  permettant d'avoir une amplitude de l'onde réfléchi totale minimale. Calculer la plus petite de ces valeurs pour  $n = 1,38$  et la longueur d'onde  $\lambda_m = 500 \text{ nm}$ .
12. Le nouveau coefficient de réflexion  $R$  de ce dispositif dépend-il de la longueur d'onde ? Expliquer. Expérimentalement, on obtient  $R(\lambda_m) = 0,015$ . Commenter.

## II. Trajectoire d'un volant de badminton

Le badminton est un sport dans lequel les joueurs frappent un projectile, appelé « volant », à l'aide d'une raquette. Le but de ce problème est de proposer une modélisation simplifiée de la trajectoire du volant sous l'effet conjugué de la pesanteur et de la résistance de l'air, et de confronter le modèle aux résultats d'une expérience.

On traite le problème dans le référentiel terrestre, considéré galiléen. On utilisera le repère cartésien  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ , avec  $Oz$  l'axe vertical ascendant. On notera  $g$  la norme du champ de pesanteur terrestre.

1. On assimile le volant à un point matériel  $M$  de masse  $m$ . On néglige dans un premier temps la force de freinage exercée par l'air. On lance le volant depuis le sol (Le volant  $M$  est en  $O$ , à l'altitude  $z = 0$ ) avec une vitesse initiale  $U_0$ , contenue dans le plan  $Oxz$  et faisant un angle  $\theta_0$  avec  $(Ox)$ .
  - a) Déterminer les équations horaires du mouvement du volant.
  - b) Déterminer l'équation de la trajectoire du volant. Dessiner son allure.
  - c) Déterminer la portée  $L_0$  (distance horizontale à laquelle le volant retombe sur le sol) en fonction de  $U_0$ , de  $\theta_0$ , et de la norme du champ de pesanteur  $g$ .
  - d) Validez dimensionnellement l'expression de  $L_0$  et vérifiez-la sur des cas limites simples que vous choisirez.
  - e) La vitesse initiale étant fixée, quel angle  $\theta_0$  permet d'envoyer le volant le plus loin possible ?
  - f) Calculer la portée  $L_0$  pour un angle  $\theta_0 = 52^\circ$  et une vitesse initiale  $U_0 = 58 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

On tient dorénavant compte du freinage de l'air. On écrit la force de freinage sous la forme :

$$\vec{F} = -\frac{1}{2}\rho S C_x U \vec{U}$$

où  $\vec{U}$  est la vitesse du volant,  $U$  sa norme,  $\rho$  la masse volumique de l'air,  $S$  une surface caractéristique associée au volant et  $C_x$  un coefficient positif appelé « coefficient de traînée ».

2. Déterminer la dimension de  $C_x$ .

3. La forme de la force de freinage proposée n'est valable que si le *nombre de Reynolds*, noté  $Re$ , est tel que  $Re \geq 2000$ . Pour le volant de badminton, le nombre de Reynolds est donné par le nombre sans dimension :

$$Re = \frac{DU}{\nu}$$

où  $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  est la *viscosité cinématique* de l'air et  $D \simeq 6 \cdot 10^{-2} \text{ m}$  la taille caractéristique d'un volant de badminton. Les valeurs initiales de la norme de la vitesse ( $U_0$ ) et valeur limite ( $U_\infty$ ) sont indiquées sur la chronophotographie de la figure 1 ci-dessous. Estimer les valeurs  $Re_0$  et  $Re_\infty$  correspondantes du nombre de Reynolds.

#### Lecture de la chronophotographie.

4. À l'aide de la chronophotographie, estimer les quantités suivantes. Expliquer les méthodes de mesure.
- la durée totale  $T$  de vol du volant (temps pour qu'il retombe au sol) ;
  - l'instant  $T_A$  auquel le volant passe à son apogée (point le plus haut) ;
  - la hauteur maximale  $H_{max}$  atteinte par le volant ;
  - la vitesse  $v_A$  du volant à l'apogée ;
  - en déduire le nombre de Reynolds  $Re_A$  à l'apogée.

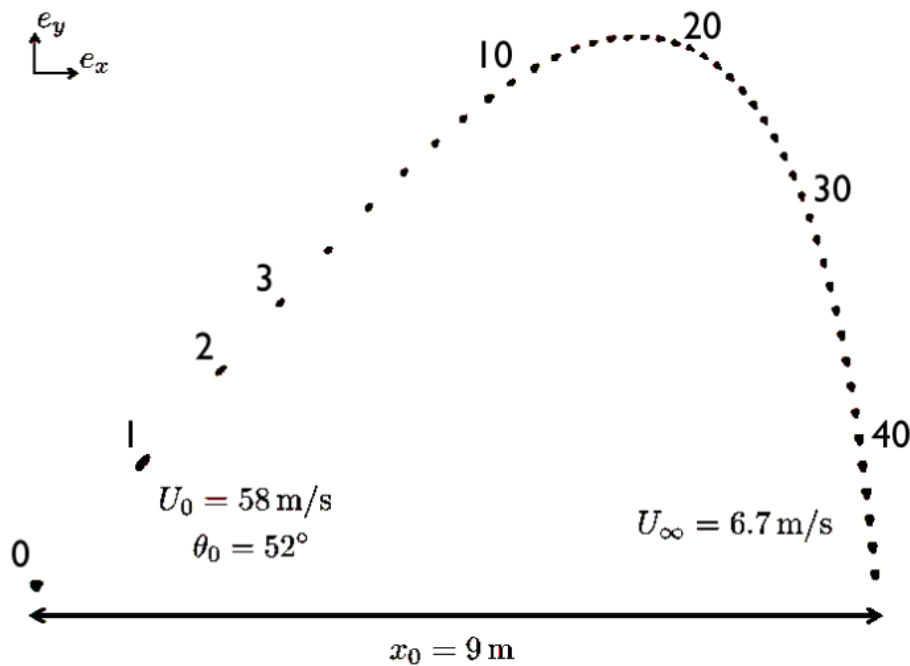


FIGURE 1 – Positions successives d'un volant de badminton allant de la gauche vers la droite, enregistrées toutes les 50 ms. Le premier point, repéré par le chiffre 0, correspond au lancer à  $t = 0$ , effectué avec une vitesse initiale de norme  $U_0 = 58 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  et d'inclinaison  $\theta_0 = 52^\circ$ .

#### Mise en équation.

5. Écrire l'équation différentielle vérifiée par  $\vec{U}$ .

#### 6. Régime limite.

Montrer que l'équation différentielle admet une solution particulière, correspondant à un mouvement rectiligne uniforme dont on exprimera la vitesse, notée  $U_\infty$ , en fonction des paramètres du problème. Tracer l'allure de la trajectoire dans ce régime, en précisant les caractéristiques de son orientation.

**7. Régime à pesanteur négligeable.**

Tant que  $U^2 \gg U_\infty^2$ , on peut négliger le poids devant la force de freinage du volant. Justifier que, tant que la pesanteur est négligeable et donc que le volant n'est soumis qu'à la force de freinage, son mouvement est rectiligne. Tracer alors l'allure de la trajectoire dans ce régime, en précisant les caractéristiques de son orientation.

**8. Régime intermédiaire.**

On modélise la trajectoire du volant en distinguant trois régimes successifs : (i) le régime que l'on vient d'étudier, durant lequel l'accélération de la pesanteur est négligeable ; (ii) un régime intermédiaire ; (iii) un régime limite durant lequel l'accélération du volant est négligeable. Localiser sur la chronophotographie le régime limite ainsi défini, en justifiant (utiliser la numérotation).

**9. Approximation de la trajectoire.**

Une approximation de la trajectoire consiste à oublier la partie correspondant au régime intermédiaire.

- Dessiner la trajectoire obtenue dans cette approximation.
- Exprimer la position horizontale du volant  $x$  en fonction de la vitesse  $U$  pendant la première phase. En déduire la portée du tir, qui sera obtenue par le passage au régime limite au moment où la force de pesanteur devient égale à la composante verticale de la force de freinage.
- Estimer numériquement la portée du tir pour  $\theta_0 = 52^\circ$  et  $U_\infty = 6,7 \text{ m.s}^{-1}$ . Comparer le résultat avec la valeur indiquée sur la chronophotographie. Commenter.

**III. Mesure de frottements**

Un jeton posé à plat sur une table horizontale est assimilé à un point matériel  $M$  de masse  $m$ . Un étudiant souhaitant déterminer le coefficient de frottement  $f$  entre le jeton et la table réalise l'expérience suivante : il lance le jeton et le laisse évoluer librement jusqu'à son arrêt total.

On suppose que le jeton n'est soumis qu'à son poids, la réaction normale  $\vec{R}_N$  de la table et sa réaction tangentielle  $\vec{R}_T$ . On prend  $O$  comme point d'origine du palet à l'instant  $t = 0$  où il n'est plus touché par l'étudiant. On choisit l'axe  $Oz$  vertical ascendant. On note  $\vec{g}$  le champ de pesanteur et  $\vec{v}_0$  la vitesse de  $M$  à  $t = 0$ .

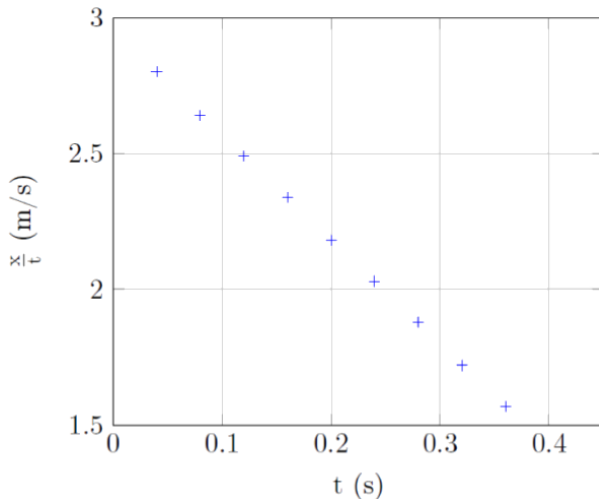
**Étude théorique**

- Justifier que le mouvement est rectiligne.  
On appellera alors  $Ox$  l'axe du mouvement, orienté dans le sens du mouvement.
- Rappeler la loi de Coulomb du frottement solide, dans le cas où il y a glissement. En déduire l'expression de  $\|\vec{R}_T\|$  en fonction des données du problème.
- Exprimer la vitesse  $\dot{x}(t)$  puis la position  $x(t)$  du jeton.
- En déduire la distance  $D$  parcourue par le jeton en fonction de  $v_0$ .

**Étude expérimentale**

Afin d'étudier expérimentalement le frottement, notre étudiant filme l'expérience du dessus, puis en analysant la vidéo, extrait la position de  $M$  en fonction du temps, lors de sa phase d'évolution libre sur la table. Il choisit arbitrairement le point  $O$  sur la vidéo, à un instant où sa main n'est plus en contact avec le jeton. La vitesse  $v_0$  n'est donc *a priori* pas connue. Après étalonnage des distances sur la vidéo, les positions  $x$  en fonction du temps  $t$  sont rassemblées dans un tableau :

t (s)	0,04	0,08	0,12	0,16	0,20	0,24	0,28	0,32	0,36	arrêt
x (m)	0,11	0,21	0,30	0,37	0,44	0,49	0,53	0,55	0,57	0,57
$\frac{x}{t}$ (m/s)	2,80	2,64	2,49	2,34	2,18	2,03	1,88	1,72	1,57	arrêt



Le graphe de  $\frac{x}{t}$  en fonction du temps est tracé ci-contre.

5. Dédurre de ce graphique les valeurs de  $v_0$  puis de  $f$ . On prendra  $g \simeq 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ .
6. Vérifier alors que la distance d'arrêt expérimentale  $D$  relevée dans le tableau correspond bien à celle attendue (cf question 4. de l'étude théorique) en effectuant l'application numérique avec les valeurs de  $g$ ,  $v_0$  et  $f$  trouvées.

### Inclinaison

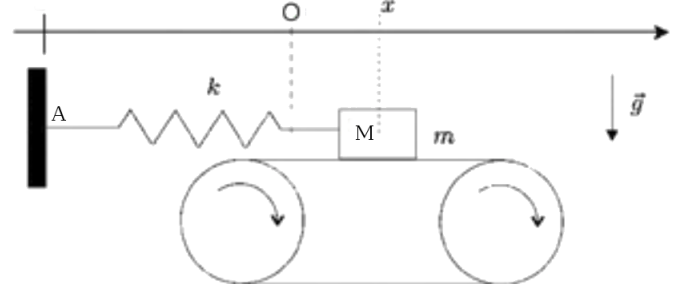
L'étudiant décide de refaire les manipulations en inclinant le plan d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale. Le jeton est lancé à  $t = 0$  avec une vitesse  $\vec{v}_0$  le long de la ligne de plus grande pente.

7. Comment la courbe de  $x/t$  en fonction de  $t$  est-elle modifiée par rapport au cas horizontal étudié précédemment ( $x$  désigne toujours la position du jeton le long du plan, incliné cette fois) ?
8. L'étudiant se dit qu'incliner le plan devrait lui permettre de ne pas avoir à lancer initialement le jeton pour faire sa mesure de  $f$ . À quelle condition cela est-il vrai ?

## IV. Le son du violon

On modélise la corde de violon frottée par l'archet à l'aide par un système masse-ressort sur un plan en mouvement à vitesse constante (cf. figure ci-dessous).

Le ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$  a l'une de ses extrémités fixe (A), tandis que l'autre est reliée à une masse  $m$ . Le tapis roulant sur lequel est posée la masse  $m$ , avance avec une vitesse constante  $u$ . On note  $(Ox)$  l'axe du tapis roulant sur lequel évolue la masse,  $x$  représentant la position du point  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}_L$  lié au laboratoire supposé galiléen ( $O$  fixe dans  $\mathcal{R}_L$  tel que  $AO = \ell_0$ , c'est-à-dire que quand  $M$  est en  $O$ , le ressort est au repos). L'axe vertical  $Oz$  est pris ascendant et le champ de pesanteur est supposé uniforme.



Modélisation du contact archet-violon.

Entre le tapis roulant et la masse existe une force de frottements solide qui suit la loi de Coulomb :

- lorsque la masse glisse sur le tapis (c'est-à-dire quand  $v(t) = \dot{x}(t) \neq u$ ) :  $\|\vec{R}_T\| = f_D \|\vec{R}_N\|$  où  $f_D > 0$  est le coefficient de *frottement dynamique* entre la masse et le tapis,  $\vec{R}_T$  et  $\vec{R}_N$  étant respectivement les réactions tangentielle et normale exercées par le tapis sur la masse. On dit qu'il y a **glissement**.
- lorsque la masse est immobile par rapport au tapis (alors  $v(t) = \dot{x}(t) = u$ ), alors nécessairement :  $\|\vec{R}_T\| \leq f_S \|\vec{R}_N\|$  où  $f_S$  est le coefficient de *frottement statique* entre la masse et le tapis. On dit qu'il y a **adhérence**.

On suppose de plus qu'une force  $\vec{T} = -T\vec{u}_z$  constante est imposée sur la masse avec  $T > 0$ . La norme  $T$  de cette force est supposée connue.

1. Que représentent alors le ressort ? la masse ? le tapis ? À quel niveau intervient la force avec laquelle le violoniste appuie l'archet sur les cordes ?

2. On note  $F_D$ , la norme de la réaction tangentielle lorsqu'il y a glissement et  $F_S$ , la norme maximale de la réaction tangentielle lorsqu'il y a adhérence (donc que le jeton et le tapis sont immobiles l'un par rapport à l'autre).

Mettre ces deux grandeurs sous la forme  $F_D = f_D F_0$  et  $F_S = f_S F_0$  où l'on exprimera  $F_0$  en fonction de  $m$ ,  $g$  et  $T$ .

**Dans toute la suite du problème, on pourra utiliser directement  $F_0$  dans les réponses littérales.**

3. Montrer que, sachant qu'il y a glissement à  $t = 0$ , l'équation différentielle qui régit l'évolution de  $x(t)$  s'écrit

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f_D F_0}{m},$$

et exprimer  $\omega_0$  en fonction de  $k$  et  $m$ .

4. À l'instant initial, la masse est au repos :  $x = 0$  et  $v = 0$ . En déduire  $x(t)$  puis  $v(t)$ .
5. Montrer que pour  $u > u_0$ , la masse continue de glisser sur le tapis. On exprimera  $u_0$  en fonction de  $f_D F_0$ ,  $k$  et  $m$ .
6. Si  $u < u_0$ , le glissement finit par cesser en un temps  $t_1$  qu'on ne déterminera pas. Déterminer  $R_T$ , la composante de la réaction tangentielle en fonction de  $x$  pour  $t > t_1$ . Montrer que l'adhérence finit par cesser lorsque  $x = x_1$ . On exprimera  $x_1$  en fonction de  $f_S$ ,  $F_0$  et  $k$ .
7. On note  $t_2$  le temps pour lequel le glissement recommence, montrer que pour  $t > t_2$

$$x(t) = \frac{f_D F_0}{k} + A \cos(\omega_0(t - t_2) + \varphi),$$

et exprimer  $A$  en fonction de  $u$ ,  $k$ ,  $\omega_0$ ,  $f_S$ ,  $f_D$  et  $F_0$ . On ne cherchera pas à déterminer  $\varphi$ .

8. On observe expérimentalement que  $f_S > f_D$ . Commenter physiquement cette propriété.
9. Montrer que le glissement va s'arrêter à nouveau et que l'on va observer un régime périodique.
10. Représenter graphiquement  $x(t)$  et  $v(t)$  puis le portrait de phase du système à partir de  $t = 0$ .

**Dans la suite on utilise ce modèle pour interpréter l'excitation d'une corde de violon.**

11. Si l'on tient compte des frottements de l'air, assimilables à des frottements fluides, la vitesse limite permettant le phénomène d'adhérence va-t-elle augmenter ou diminuer (on demande ici une réponse qualitative) ?
12. Si l'on tient compte des frottements fluides, on observe qu'au dessus d'une vitesse limite, proche de la vitesse  $u_0$ , les oscillations n'ont pas lieu. Une résine, le colophane est utilisée afin d'augmenter les coefficients de frottement entre les cordes et l'archet. Expliquez quelle est la conséquence pratique de son utilisation.
13. La tension de la corde au moyen des chevilles joue sur quel paramètre du modèle ? Quelle est la conséquence sur la hauteur du son ?

\* \* \* FIN DE L'ÉPREUVE \* \* \*