

# FILTRAGE ET ONDES

## I. Etude d'un filtre (d'après Centrale II TSI 2010)

### I.1. Etude expérimentale

1. Il y a chaque fois 5 périodes, donc  $T_1 = 100 \text{ ms}$ ,  $T_2 = 200 \mu\text{s}$ ,  $T_3 = 20,0 \mu\text{s}$ , donc

$$\boxed{f_1 = 10,0 \text{ Hz}, f_2 = 5,00 \text{ kHz}, f_3 = 50,0 \text{ kHz}}.$$

La tension de sortie est très faible à haute fréquence et importante à basse fréquence. Cela est caractéristique d'un filtre passe-bas.

2. Le rapport des amplitudes donne le gain (cf Fig. 1)  $G = \frac{0,50 \text{ V}}{1,00 \text{ V}} = 0,50$ .

On peut mesurer le retard temporel de la sortie sur l'entrée en comparant par exemple les instants des zéros montant :  $\Delta t = 0,06 \text{ ms}$ . Donc  $\phi = -\omega \Delta t = -2\pi f_2 \Delta t = -1,9 \text{ rad}$ .

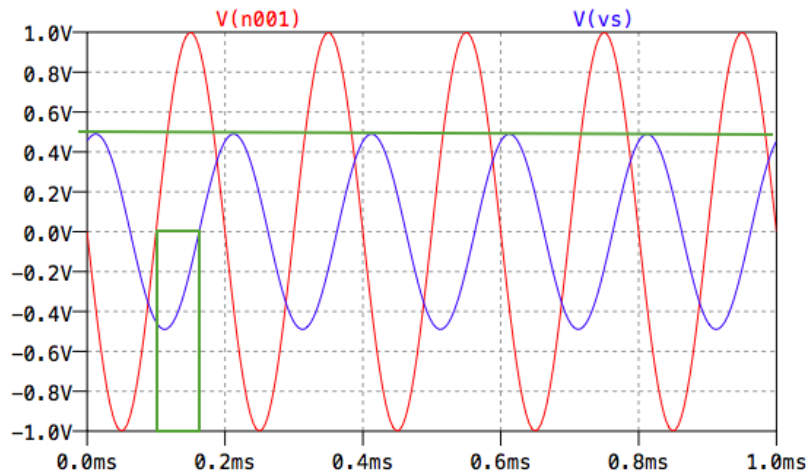


FIGURE 1 – Etude à  $f_2$

3. On passe de  $-17 \text{ dB}$  pour  $10 \text{ kHz}$  à  $-97 \text{ dB}$  à  $1 \text{ MHz}$ , c'est-à-dire en  $\log 10^6 - \log 10^4 = 2$  décades (cf Fig. 2). La pente de l'asymptote est donc de  $\frac{-97 - (-17)}{2} = -40 \text{ dB/décade}$  : c'est donc un filtre d'ordre 2.
4. On cherche la fréquence pour laquelle le gain en décibel vaut  $G_{dB} = G_{dB,max} - 3,0 \text{ dB} = -3,0 \text{ dB}$ . Il vient graphiquement  $f_c \approx 4 \text{ kHz}$ .

### I.2. Etude théorique

- 5.

À basses fréquences, un condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. Donc l'intensité  $i_+$  traverse les deux résistances  $R$ . Comme  $i_+ = 0$ , il vient  $V_+ = V_e = u_e$ . Or  $V_s = V_- = V_+$ , donc  $\boxed{u_s = u_e}$ .

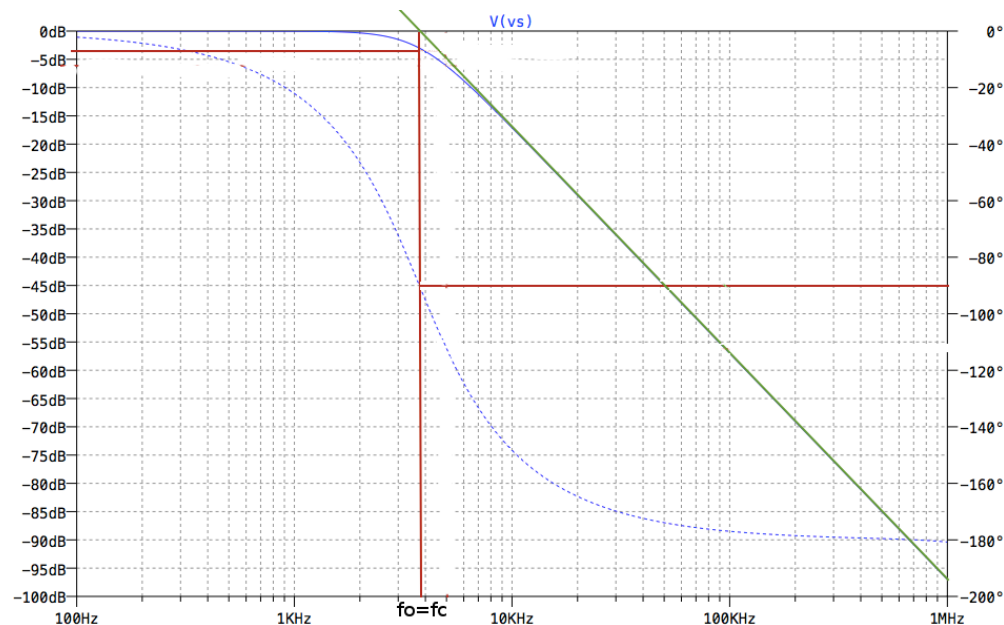
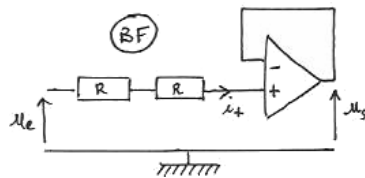
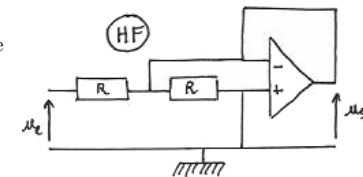


FIGURE 2 – Diagramme de Bode du filtre

À hautes fréquences, un condensateur se comporte comme un fil. Donc  $V_+ = 0$  donc  $\boxed{u_s = V_- = V_+ = 0}$ .

Il s'agit donc bien d'un filtre passe-bas.



6. a) Comme  $i_+ = 0$ ,  $R$  et  $C$  forme un pont diviseur de tension donc :  $\boxed{V_+ = \frac{1}{1 + jRC\omega} V_A}$ .

- b) La loi des noeuds en terme de potentiel s'écrit :

$$\frac{V_E - V_A}{R} + \frac{V_+ - V_A}{R} + j2C\omega(V_S - V_A) = 0 \Leftrightarrow \boxed{2(1 + j\omega RC)V_A = u_e + V_+ + 2j\omega RC u_s}$$

- c) En injectant  $V_+ = V_- = u_s$  dans les deux équations ci-dessus, on obtient

$$2(1 + j\omega RC)^2 u_s = u_e + (1 + 2j\omega RC) u_s \Leftrightarrow \underline{H} = (1 + 2j\omega RC + 2(j\omega RC)^2)^{-1}$$

$$\text{D'où } \underline{H} = \frac{H_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}} \text{ avec } \boxed{H_0 = 1}, \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2}RC}} \text{ et } \boxed{Q = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

7. On a  $G = |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + 2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$  d'où  $\boxed{G = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^4}{\omega_0^4}}}}$ .

8. Basses fréquences :  $G_{dB} \xrightarrow[\omega \rightarrow 0]{} 0$  donc l'asymptote est horizontale confondue avec l'axe des abscisses pour  $\frac{f}{f_0} \ll 1$ . C'est cohérent avec le tracé expérimental.

Haute fréquence :  $G_{dB} \approx -20 \log \left( \frac{f^2}{f_0^2} \right) = 40 \log(f_0) - 40 \log f$ . L'asymptote est **une droite de pente**  $-40$  dB/decade.

Le point d'intersection des deux asymptotes est en  $f = f_0$ . On peut donc trouver  $f_0$  graphiquement. On trouve  $f_0 \approx 4$  kHz.

On retrouve bien que  $f_0 = f_c$  comme attendu théoriquement pour cette valeur du facteur de qualité  $Q$ .

9. On a  $H(f_0) = \frac{1}{\sqrt{2j}}$  donc  $\phi(\omega_0) = -\frac{\pi}{2} = -90^\circ$ , ce qui est cohérent avec le tracé expérimental.

**I.3. Application du filtre : démodulation d'un signal en amplitude**

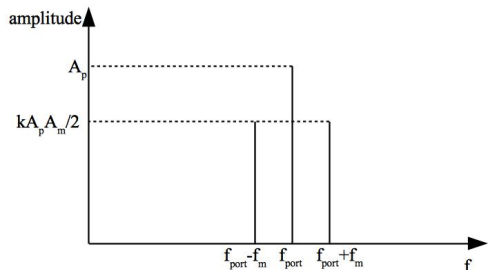
10. En linéarisant  $s(t)$ , on obtient trois composantes spectrales (3 harmoniques) :

$$s(t) = A_p \cos(2\pi f_p t) + \frac{k A_p A_m}{2} (\cos(2\pi(f_m + f_p)t) + \cos(2\pi(f_p - f_m)t))$$

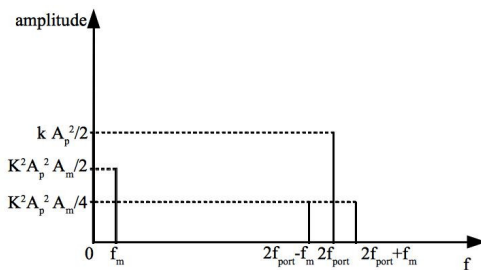
En linéarisant  $s'(t) = k A_p^2 [1 + k A_m \cos(2\pi f_m t)] \cos^2(2\pi f_p t)$ , on obtient 4 harmoniques :

$$s'(t) = \frac{k A_p^2}{2} + \frac{k^2 A_p^2 A_m}{2} \cos(2\pi f_m t) + \frac{k A_p^2}{2} \cos(4\pi f_p t) + \frac{k^2 A_p^2 A_m}{4} (\cos(2\pi(f_m + 2f_p)t) + \cos(2\pi(2f_p - f_m)t))$$

On en déduit les deux spectres en amplitude respectifs :



Spectre du signal modulé  $s(t)$ .



Spectre du signal  $s'(t)$ .

11. Le filtre passe-bas doit permettre de ne garder que le signal de fréquence  $f_m$  et la valeur moyenne. Grâce à cette contrainte de 80 dB, on atténue d'un facteur  $10^4$  les signaux qu'on ne désire pas garder situés au voisinage de la fréquence  $2f_p$ , ce qui les élimine totalement. On veut donc :

$$G(2f_p) = 10^{-4} \Leftrightarrow 1 + \frac{4f_p^2}{f_0^2} = 10^4 \Leftrightarrow 2f_p \approx 10^2 f_0 \Leftrightarrow R = \frac{10^2}{4\pi\sqrt{2}Cf_p} = 30 \text{ k}\Omega.$$

12. Dans ces conditions, et compte-tenu du fait que  $f_m \ll f_c = f_0$ , le gain et le déphasage qui s'appliquent respectivement à la composante continue et à la fréquence  $f_m$  sont :  $G(0) = |H_0| = 1 \approx G(f_m)$  et  $\varphi(0) = \arg(1) = 0 \approx \varphi(f_m)$ . Finalement, **on conserve les deux premières composantes de  $s'(t)$  intactes** à

la sortie du filtre (cad celles de plus basses fréquences), ce qui donne  $s''(t) = \frac{k A_p^2}{2} + \frac{k^2 A_p^2 A_m}{2} \cos(2\pi f_m t)$ .

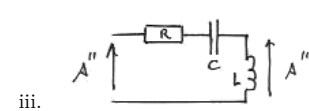
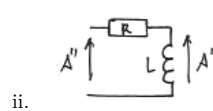
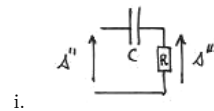
13. On veut maintenant récupérer uniquement le signal modulant, donc la composante de fréquence  $f_m$ . Il faut concevoir un filtre passe-haut. À l'aide de dipôles de type  $R$ ,  $L$  et  $C$ , différents choix sont possibles :

i. un circuit  $R - C$  série en prenant la tension de sortie sur la résistance (filtre d'ordre 1) :

ii. un circuit  $R - L$  série en prenant la tension de sortie sur la bobine (filtre d'ordre 1) :

iii. un circuit  $R - L - C$  série en prenant la tension de sortie sur la bobine (filtre d'ordre 2) :

iv. d'autres filtres passifs plus compliqués, ou des filtres actifs...

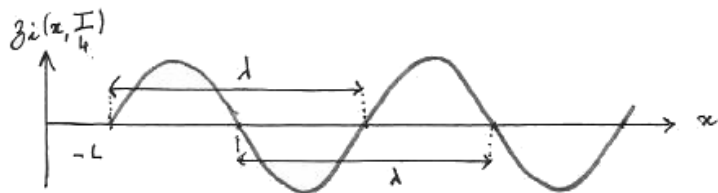


Avec la première solution, la fréquence de coupure est  $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$  et on veut  $f_c \ll f_m \Leftrightarrow RC \gg \frac{1}{2\pi f_m}$ . On doit pouvoir transmettre des fréquences sonores dans la bande [50 Hz ; 5 kHz], ce qui impose  $RC \gg 3 \times 10^{-3}$  s. Cela peut être obtenu par exemple avec  $R = 30 \text{ k}\Omega$  et  $C = 1 \mu\text{F}$  ce qui donne  $RC = 3 \times 10^{-2}$  s.

## II. Piscine à vagues

### II.1. Utilisation d'une plaque oscillante

- On a  $[\rho] = M.L^{-3}$  d'où  $[c^2] = L^2.T^{-2} = \frac{L.[A]}{M.L^{-3}}$  d'où  $[A] = M.T^{-2}$ .  
La constante de tension superficielle représente une **énergie par unité de surface**.
  - On a alors  $H = \frac{c^2}{g} = 1,6 \text{ m}$ .
- L'onde incidente se translate (sans déformation) vers la droite depuis  $x = -L$ , donc  $z_i(x, t)$  est la perturbation vue en  $x = -L$  à l'instant antérieur  $t - \frac{x+L}{c}$ , d'où  $z_i(x, t) = Z_m \cos(\omega t - k(x+L))$ , en posant  $k = \frac{\omega}{c}$  le nombre d'onde angulaire. On a bien  $z_i(-L, t) = Z_m \cos(\omega t)$ .
  - Comme  $\omega \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}$ , on obtient  $z_i(x, \frac{T}{4}) = Z_m \sin(k(x+L))$ . La fonction n'est pas définie pour  $x < -L$ ...

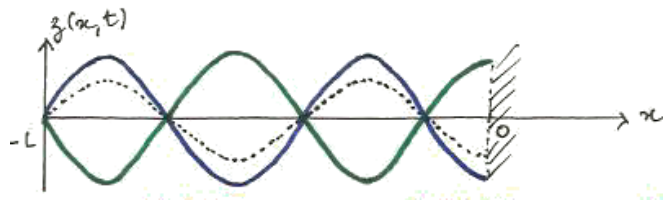


- On a  $z_i(0, t) = Z_m \cos(\omega t - kL)$  donc  $z_r(0, t) = Z_{mr} \cos(\omega t - kL)$ . Comme l'onde réfléchie se propage en sens inverse depuis  $x = 0$ , ceci conduit à  $z_r(x, t) = Z_{mr} \cos(\omega(t + \frac{x}{c}) - kL) = Z_{mr} \cos(\omega t + k(x-L))$ . Pour que l'amplitude des vibrations temporelles soit maximale en  $x = 0$ , cela nécessite que

$$\forall t, \frac{\partial(z_i + z_r)}{\partial x}(x = 0, t) = 0 \Leftrightarrow \forall t, k(Z_m - Z_{mr}) \cos(\omega t - kL) = 0 \Leftrightarrow Z_m = Z_{mr}.$$

Ainsi l'onde réfléchie a la même amplitude que l'onde incidente, donc  $z_r(x, t) = Z_m \cos(\omega t + k(x-L))$ .

- On peut factoriser la somme, ce qui donne  $z(x, t) = 2Z_m \cos(kx) \cos(\omega t - kL)$ . Les variables  $x$  et  $t$  sont découplées donc cette onde n'est pas progressive. Elle vibre « sur place », il s'agit d'une **onde stationnaire**.
  - On a donc  $\cos(-kL) = 0$ , donc  $kL = (n + \frac{1}{2})\pi$  c'est-à-dire  $L = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}$  avec  $n \in \mathbb{N}$ . Cela s'interprète graphiquement simplement : puisque l'onde commence par un nœud et termine par un ventre, **la longueur totale est décomposée comme un nombre impair de quarts de longueur d'onde**.
  - S'il y a 4 nœuds, alors  $n = 3$  et  $L = 7 \frac{\lambda}{4}$ . Ci-dessous on représente la surface à deux instants correspondant aux positions extrêmes de chaque point de la surface (bleu et vert), et un instant quelconque (noir pointillé).



- L'expression précédente s'écrit  $L = \frac{7}{4} cT = 21 \text{ m}$ .

### II.2. Utilisation d'injecteurs

- Les injecteurs sont placés au niveau du premier ventre consécutif à celui du bord, donc  $d = \frac{\lambda}{2}$ . Or il y a deux fuseaux entiers et deux demi-fuseaux, donc  $L = \frac{3}{2}\lambda$ . Par conséquent  $d = \frac{L}{3}$ .
  - On a  $L = \frac{3c}{2f}$  donc  $f = \frac{3c}{2L} = 0,50 \text{ Hz}$ .
  - Deux ventres consécutifs sont en opposition de phase, donc les jets doivent l'être aussi, c'est-à-dire **déphasés de  $\pi$** . D'un point de vue temporel ils sont décalés de  $\frac{T}{2} = \frac{1}{2f} = 1,0 \text{ s}$ .
- Avec un nœud de plus, on a un ventre de plus donc un jet supplémentaire, donc **3 jets au total**. Les jets sont espacés de  $d = \frac{L}{4}$ .  
**Les deux jets extrêmes sont en phase, et le jet central est déphasé de  $\pi$  par rapport aux autres.**

