

# FILTRAGE ET ONDES

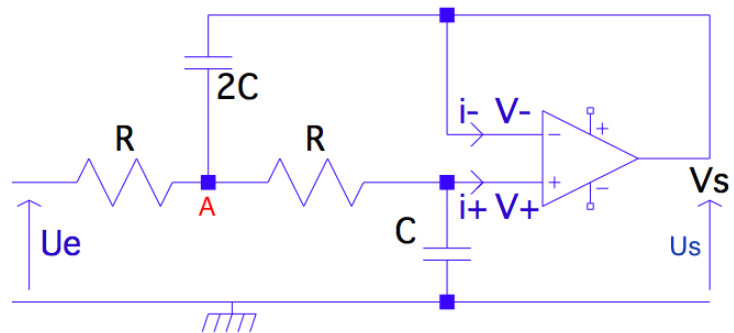
Soignez la présentation et la rédaction, qui doit être complète et concise. Tout résultat doit être justifié, et mis en valeur. Les résultats littéraux doivent être homogènes. Les résultats numériques doivent avoir un nombre de chiffres significatifs vraisemblable. Les schémas doivent être clairs, suffisamment grands et lisibles. Si vous n'arrivez pas à montrer un résultat, admettez-le clairement et poursuivez.

## CALCULATRICES AUTORISÉES

### I. Filtrage

On considère le filtre ci-contre, où l'amplificateur opérationnel (ALI) est supposé idéal et fonctionne en régime linéaire quelque soit la fréquence. C'est-à-dire que :

- les potentiels  $V_+$  et  $V_-$  des bornes + et - de l'ALI vérifient :  $V_+ = V_-$ .
- les courants  $i_+$  et  $i_-$  entrant dans les bornes + et - de l'ALI vérifient :  $i_+ = i_- = 0$ .



Pour étudier le comportement fréquentiel du filtre, on le soumet à une tension sinusoïdale en entrée :  $u_e(t) = U_{em} \cos(\omega t + \varphi_e)$ .

La tension de sortie sera en régime sinusoïdal forcé de la forme :  $u_s(t) = U_{sm} \cos(\omega t + \varphi_s)$ .

On notera  $H$  la fonction de transfert du filtre,  $G$  son gain réel,  $G_{dB}$  son gain en décibel et  $\varphi$  sa phase.

**Certaines questions portent sur les figures présentées en annexe. On y fera apparaître les tracés et notations permettant de répondre aux questions. Et on n'oubliera pas de rendre cette annexe avec la copie.**

#### I.1. Etude expérimentale

On désire réaliser une étude expérimentale du filtre. On relie les 2 voies d'un oscilloscope au circuit pour mesurer  $u_s(t)$  et  $u_e(t)$ . On a représenté en annexe (Figure. 1) les chronogrammes obtenus respectivement pour trois fréquences  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$  ( $f_1 < f_2 < f_3$ ). On précise que la tension d'entrée possède toujours une amplitude  $U_{em} = 1,0 \text{ V}$ .

1. Mesurer les valeurs de  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$ . On n'hésitera pas à annoter les graphes. Déduire des chronogrammes le type probable du filtre étudié.
2. Lorsque la fréquence est  $f_2$ , mesurer expérimentalement le gain réel  $G$  et la phase  $\varphi$  du filtre. On précisera clairement la méthode utilisée.

On observe les chronogrammes entrée et sortie pour différentes fréquences et grâce à la méthode exposée à la question 2., on trace le diagramme de Bode du filtre représenté en annexe (Figure. 2). Le gain est représenté en trait plein et la phase en trait discontinu.

3. Mesurer sur le graphique la pente de l'asymptote haute-fréquence. S'agit-il a priori d'un filtre d'ordre 1 ou d'ordre 2?
4. Déterminer à l'aide du graphe la ou les fréquence(s) de coupure du filtre.

## I.2. Etude théorique

5. En étudiant les circuits asymptotiques à basse et haute fréquence, établir la nature du filtre. Justifier soigneusement en appliquant les lois rappelées en début d'énoncé sur le fonctionnement de l'ALI en régime linéaire.
6. On se propose maintenant de déterminer complètement la fonction de transfert  $\underline{H}$  pour l'étudier.
  - a) Exprimer le potentiel  $\underline{V}_+$  en fonction de  $R, C$  et  $\underline{V}_A$ , potentiel au point A.
  - b) En appliquant la loi des noeuds en terme de potentiel au point A, trouver une relation entre  $\underline{V}_A, \underline{V}_+$  et  $\underline{u}_e$ .
  - c) En déduire que la fonction de transfert s'écrit sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

où l'on exprimera  $H_0, \omega_0$  et  $Q$  en fonction de  $R$  et  $C$ .

7. Montrer que le gain réel s'écrit :

$$G = \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + \frac{\omega^4}{\omega_0^4}}}$$

8. Etablir l'équation des asymptotes hautes et basses fréquences du filtre. En déduire graphiquement une valeur expérimentale de la fréquence propre  $f_0$  sur la figure 2 en annexe.
9. Que vaut théoriquement  $\varphi$  lorsque  $\omega = \omega_0$ ? Cette valeur est-elle cohérente avec l'expérience? Annoter le graphe en conséquence.

## I.3. Application du filtre : démodulation d'un signal modulé en amplitude

Il est fréquent qu'un signal se présente sous une forme inadaptée à sa transmission ou à son traitement. La modulation est le procédé permettant de transposer les caractéristiques de ce signal dans des domaines de fréquences où la propagation et le traitement sont possibles. La démodulation est l'opération inverse. Considérons le cas simple d'un signal audio d'une seule fréquence  $f_m$ , que nous appellerons le *signal modulant* :  $e(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$ . On utilise un *signal porteur*  $p(t) = A_p \cos(2\pi f_p t)$  de fréquence  $f_p \gg f_m$ . Ainsi, le signal modulé en amplitude est de la forme :

$$s(t) = A_p [1 + k A_m \cos(2\pi f_m t)] \cos(2\pi f_p t) \quad (1)$$

où  $k$  est un réel strictement positif. On admet qu'au niveau du récepteur du signal modulé, on dispose d'un oscillateur local synchronisé avec la porteuse délivrant le signal  $p(t) = A_p \cos(2\pi f_p t)$  identique au signal porteur utilisé à l'émission. Le circuit de démodulation réalise la multiplication suivante :

$$s'(t) = k p(t) s(t)$$

avec  $k$  le même réel positif que celui introduit dans l'Eq. (1).

10. Représenter en les justifiant les spectres en amplitude des signaux  $s(t)$  et  $s'(t)$ .

On fait entrer le signal  $s'(t)$  dans un filtre passe-bas de fréquence de coupure  $f_c$  telle que  $f_m \ll f_c \ll f_p$ . On suppose que ce filtre est constitué par le montage étudié précédemment.

11. Le cahier des charges impose une atténuation de 80 dB pour les signaux de fréquences voisines de  $2f_p$  par rapport au signaux continus. Montrer l'intérêt de cette contrainte et proposer une valeur de  $R$  lorsque  $C = 1,00 \text{ nF}$  et  $f_p = 185 \text{ kHz}$ .
12. Donner l'expression du signal  $s''(t)$  en sortie de ce filtre.
13. Proposer un montage permettant d'éliminer la composante continue de  $s''(t)$ . On donnera une valeur pour les composants.

## II. Piscine à vagues

On étudie dans ce problème deux techniques utilisées pour produire des vagues dans une piscine.

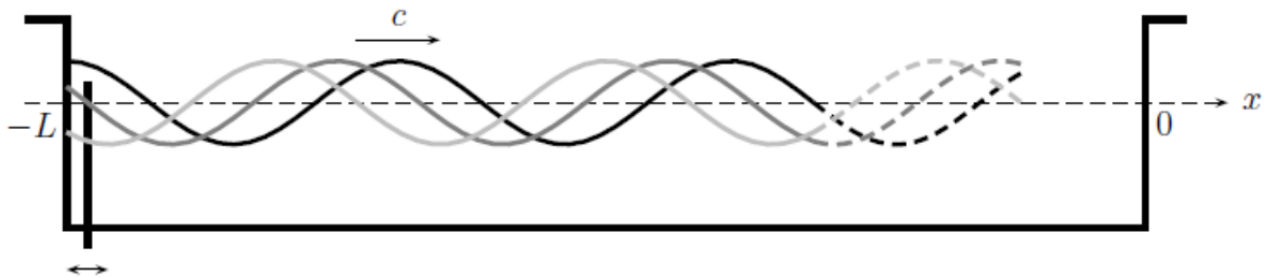
### II.1. Utilisation d'une plaque oscillante

La première technique consiste à produire des ondes progressives à une extrémité de la piscine par déplacement horizontal d'un panneau métallique. La superposition de cette onde avec l'onde réfléchie à l'autre bout de la piscine produira une onde stationnaire.

- On donne la relation liant la célérité  $c$  des vagues à la profondeur  $H$  de la piscine, la masse volumique  $\rho$  de l'eau, l'accélération de pesanteur  $g$ , la longueur d'onde  $\lambda$  et le coefficient de tension superficielle  $A$  de l'interface eau-air.

$$c^2 = gH + \frac{4\pi^2 HA}{\rho\lambda^2}$$

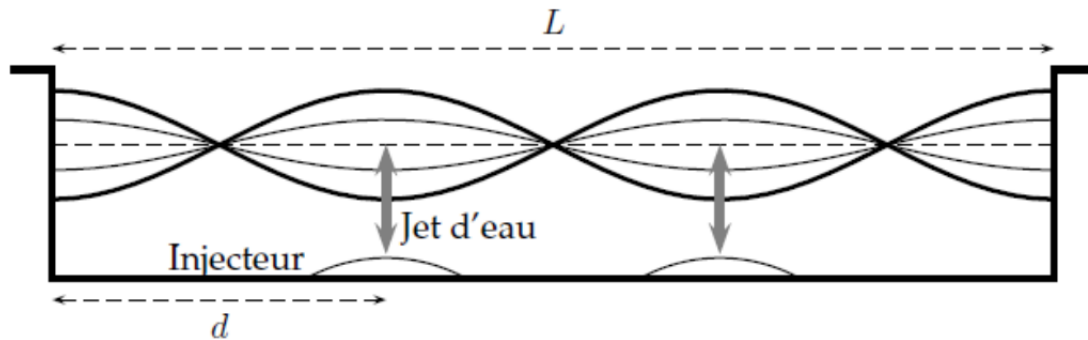
- Quelle est la dimension de  $\rho$ ? En déduire celle de  $A$ .
  - On néglige l'effet de la tension superficielle en posant  $A = 0$ . Calculer  $H$  pour obtenir  $c = 4,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . On donne  $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .
- Les oscillations à la pulsation  $\omega$  du plateau métallique permettent de produire une variation sinusoidale de la hauteur  $z_i(-L, t) = Z_m \cos(\omega t)$  du point de la surface de l'eau situé à l'extrémité gauche de la piscine, en  $x = -L$  (cf figure ci-dessous). Il apparaît une onde progressive  $z_i(x, t)$  que l'on supposera sinusoidale et se déplaçant sans atténuation dans le sens des  $x$  croissants à la célérité  $c$ .



- Expliciter  $z_i(x, t)$ , la hauteur associée à l'onde progressive incidente en fonction des données  $Z_m$ ,  $\omega$ ,  $c$  et  $L$ . On vérifiera que la relation appliquée en  $x = -L$  correspond bien à l'expression ci-dessus?
  - Donner l'expression de  $z_i(x, T/4)$  et tracer l'allure de l'onde incidente sur la piscine à  $t = T/4$  où  $T$  est la période (temporelle) d'oscillation de la plaque. On fera apparaître la période (spatiale) de  $z_i(x, T/4)$  sur la figure.
- À l'extrémité d'abscisse  $x = 0$  de la piscine, apparaît une onde réfléchie notée  $z_r(x, t)$ . On admet que l'on peut démontrer que les ondes incidente et réfléchie sont en phase en  $x = 0$  à cause du bord qui empêche tout mouvement horizontal et donc conduit à une amplitude de vibration verticale maximale. En déduire l'expression de  $z_r(0, t)$ , puis celle de  $z_r(x, t)$  en fonction des données.
  - Onde stationnaire.
    - En déduire l'expression de l'onde résultante  $z(x, t) = z_i(x, t) + z_r(x, t)$  et montrer qu'elle est stationnaire.
    - En  $x = -L$ , le panneau métallique impose un nœud de vibration. En déduire la relation liant  $\lambda$  et  $L$ .
    - Représenter l'onde stationnaire à différents instants dans le cas où la condition précédente est respectée et où il y a uniquement quatre nœuds à la surface de la piscine (en comptant celui situé en l'abscisse  $x = -L$ ).
    - Pour le mode de vibration précédent, quelle devrait être la longueur  $L$  de la piscine si l'on prend pour célérité  $c = 4,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  et une période d'oscillation de la plaque métallique  $T = 3,0 \text{ s}$ ?

## II.2. Utilisation d'injecteurs

La seconde technique consiste à utiliser des injecteurs convenablement placés et synchronisés. Les injecteurs sont des dispositifs qui pulsent puis aspirent verticalement et alternativement de l'eau. Ils sont placés au fond de la piscine sous les ventres de vibration (cf figure ci-dessous). Un capteur de pression situé à une extrémité de la piscine permet de les synchroniser à une fréquence optimale  $f$  correspondant à un mode de vibration de l'onde stationnaire.



5. Dans le mode représenté ci-dessus, on peut placer deux injecteurs. Exprimer la distance  $d$  au bord de la piscine de longueur  $L$  à laquelle ils doivent être placés ?
6. On considère que les injecteurs sont réglés à la même fréquence  $f$ .
  - a) Pour le même mode, exprimer  $f$  en fonction de  $L$  et de la célérité  $c$  des ondes (progressives) à la surface de la piscine. Faire l'application numérique pour  $L = 12 \text{ m}$  et  $c = 4,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  ?
  - b) Les jets doivent-ils être injectés au même instant par les deux injecteurs ? Si non, quel doit-être le décalage temporel  $\Delta t$  ?
7. Combien d'injecteurs faudrait-il, où devrait-on les placer et comment devrait-on régler les jets pour obtenir le mode de vibration correspondant à un nœud de plus dans la même piscine ? On pourra répondre de façon littérale et par un schéma, sans applications numériques.

\* \* \* FIN DE L'ÉPREUVE \* \* \*

(pensez à rendre votre annexe avec votre NOM et Prénom)

**ANNEXE - NOM Prénom :**

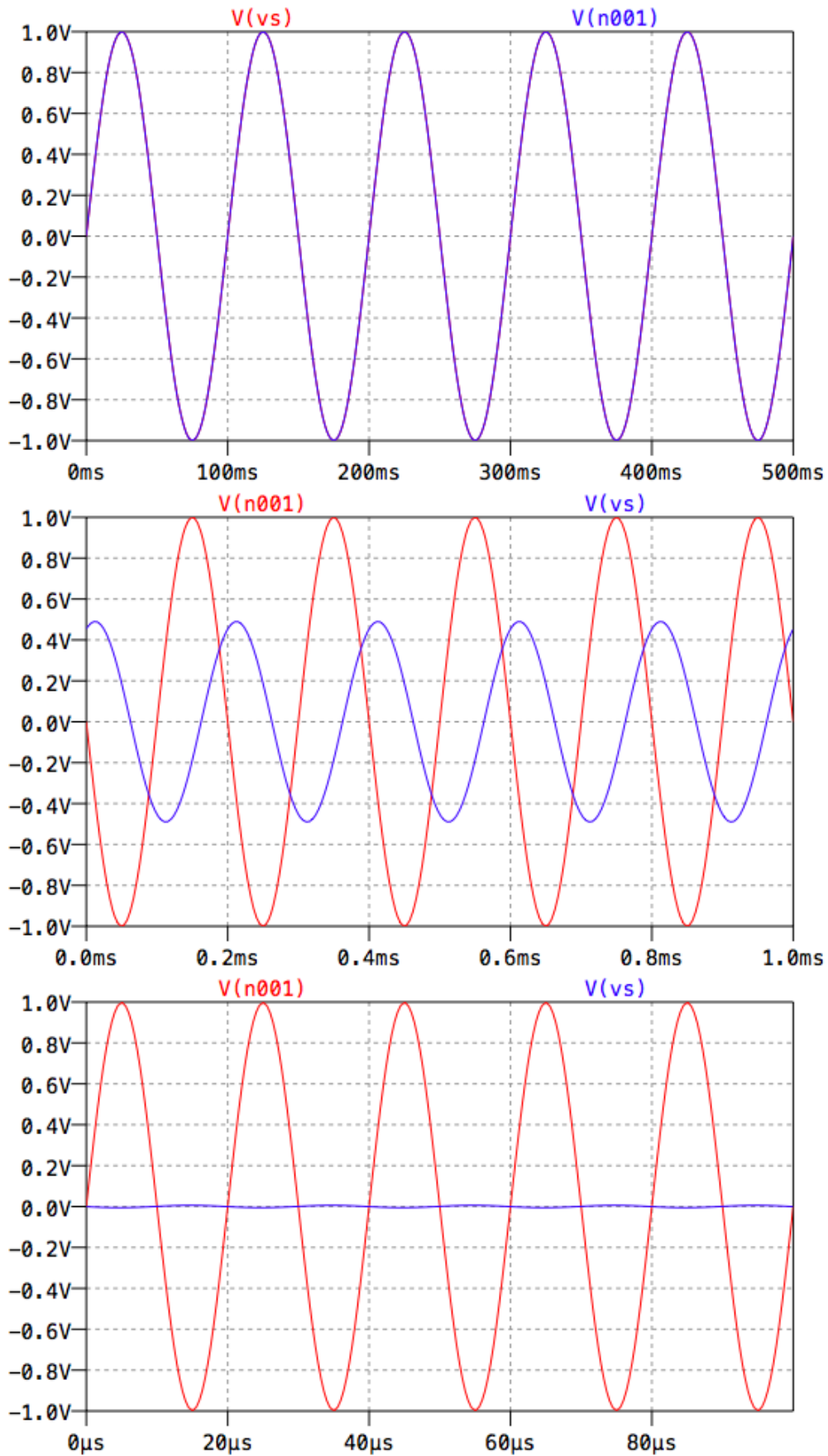


FIGURE 1 – Chronogramme obtenus pour trois fréquences  $f_1, f_2$  et  $f_3$  ( $f_1 < f_2 < f_3$ ).

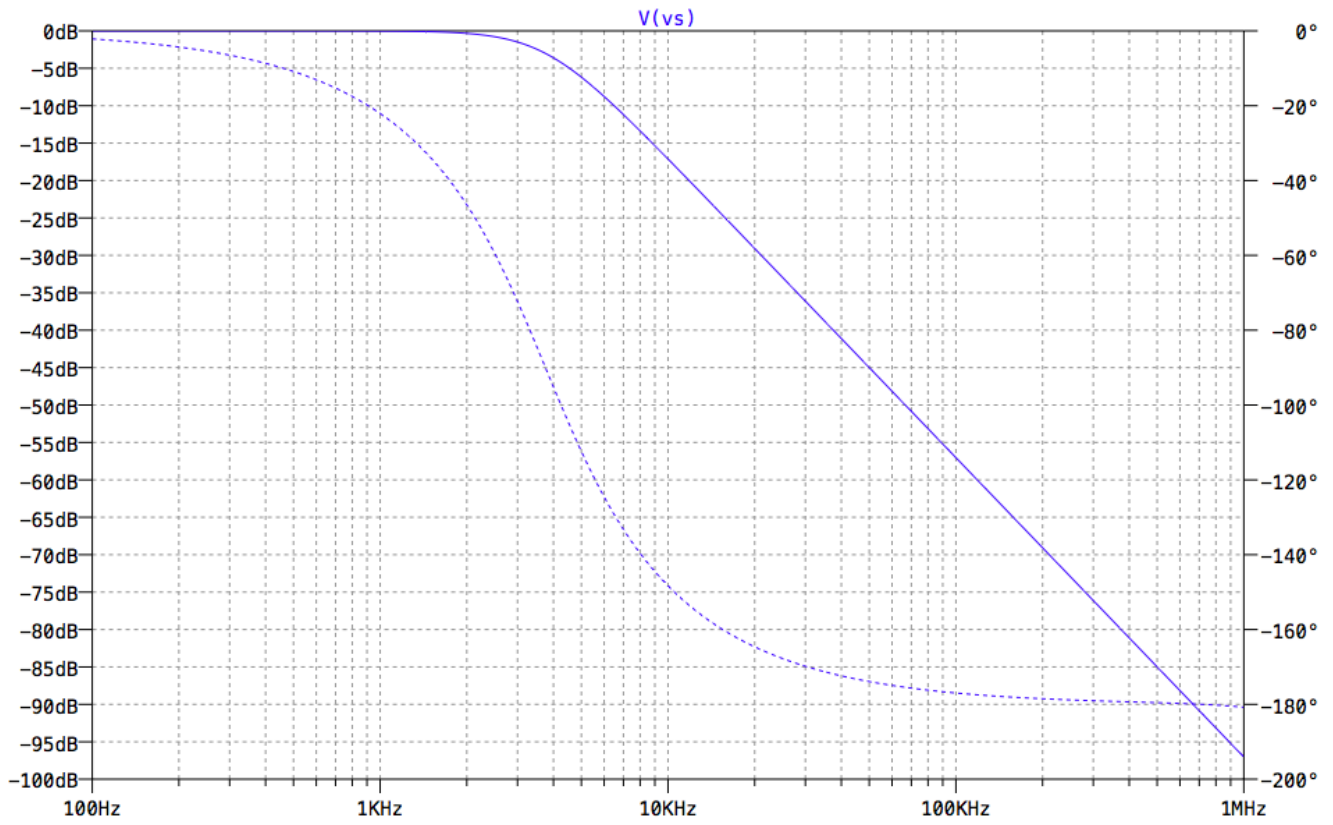


FIGURE 2 – Diagramme de Bode du filtre