ÉLECTRICITÉ : Régimes transitoires et sinusoïdal forcé

I. Détermination des caractéristiques d'un circuit

1. En $t = 0^-$ et en $t \to +\infty$, le régime est stationnaire donc le condensateur est assimilable à un interrupteur ouvert et la bobine à un fil. Donc le courant i circule aussi dans la résistance R. La loi des mailles impose $u_r - u_R = (r+R)i = 0$. Donc $\boxed{i(0^-) = \lim\limits_{t\to\infty} i = 0}$.

Par ailleurs la bobine impose la continuité de i donc $\boxed{i(0^+) = 0}$.

2. Il y a deux mailles indépendantes. L'application de la loi des noeuds suivie des deux lois de maille conduit à

$$i = C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} - \frac{u_R}{R} = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E - u_L - u_r) - \frac{1}{R}(u_L + u_r) = -CL\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} - rC\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - \frac{r}{R}i = 0$$

On en déduit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\, i = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1+\frac{r}{R}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{\sqrt{LC}}{rC + \frac{L}{R}}\sqrt{1+\frac{r}{R}}}.$$

3. Le régime est pseudo-périodique si les racines de l'équation caractéristique $x^2 + \frac{\omega_0}{Q}x + \omega_0^2 = 0$ sont complexes conjuguées, donc si le discriminant $\Delta = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right) < 0 \Leftrightarrow Q > \frac{1}{2}$, donc à la condition $\boxed{\frac{\sqrt{LC}}{rC + \frac{L}{R}}\sqrt{1+\frac{r}{R}} > \frac{1}{2}}$.

4. La forme générale de la solution est $i(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}\left(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right)$ avec $\boxed{\tau = \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{2LC}{rC + \frac{L}{R}}}$ et $\boxed{\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$. L'application des conditions initiales conduit à :

- $i(0^+) = 0 = A$ donc $i(t) = B\,e^{-\frac{t}{\tau}}\sin(\Omega t)$.
- $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{u_L(0^+)}{L} = \frac{1}{L}\left(E - u_c(0^+) - u_r(0^+)\right)$ donc $\boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{E}{L}}$.
  Or $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \left[-\frac{1}{\tau}\sin(\Omega t) + \Omega\cos(\Omega t)\right]B\,e^{-\frac{t}{\tau}}$, donc $B = \frac{E}{L\Omega}$.

Finalement $\boxed{i(t) = \frac{E}{L\Omega}\,e^{-\frac{t}{\tau}}\sin(\Omega t)}$.

5. On mesure la pseudo-période sur les zéros montant du signal : $6T = 6{,}0\,\mathrm{ms}$ donc $\underline{T = 1{,}0\,\mathrm{ms}}$.
Le signal $u_r = ri$ est un régime transitoire. Le décrément logarithmique peut être défini par $\delta = \ln\frac{u_r(t_m)}{u_r(t_m+T)}$ où t_m représente un maximum (ou un minimum) du signal. En prenant les 2 premiers maxima, on obtient $\delta = \ln\frac{0{,}42}{0{,}21} = \ln 2{,}0$ donc $\underline{\delta = 0{,}69}$.

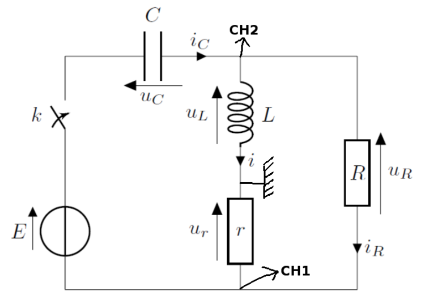
6. On a $u_r(t_m+T) = \frac{rE}{L\Omega}e^{-\frac{t_m+T}{\tau}}\sin(\Omega(t_m+T)) = e^{-\frac{T}{\tau}}\frac{rE}{L\Omega}e^{-\frac{t_m}{\tau}}\sin(\Omega t_m) = e^{-\frac{T}{\tau}}u_r(t_m)$ car $\Omega T = 2\pi$, donc $\boxed{\delta = \frac{T}{\tau} = \frac{2\pi\omega_0}{\Omega 2Q} = \frac{\pi}{Q}\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}}}$.

On inverse cette relation pour obtenir $\boxed{Q = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{\delta^2}}} \approx \underline{4{,}6}$.

7. On en déduit $\boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{T}\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}}} \approx \underline{6{,}3\times10^3\,\mathrm{rad.s^{-1}}}$.

8.

L'oscilloscope mesure les différences de potentiel par rapport à la terre. Il faut donc brancher **la terre entre la bobine et la résistance** r comme indiqué ci-contre par le symbole de masse, puis observer les signaux en mode XY après avoir appliqué une inversion sur la voie CH1 pour voir u_r et non $-u_r$.
Toutefois cela n'est possible que si la source E est flottante (par exemple une pile ou une alimentation stabilisée). Si c'est un GBF, l'une de ses bornes est déjà reliée à la terre donc certains dipôles seraient court-circuités.



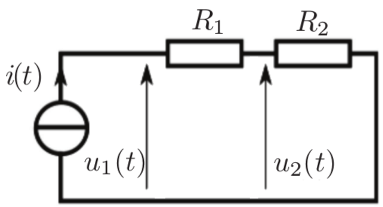
Dans ce second cas la solution consisterait à isoler galvaniquement la source E du reste du circuit avec un *transformateur d'isolement* ou utiliser une *sonde différentielle* (sonde de tension avec un transformateur intégré).

9. Les 3 derniers portraits correspondent à des régimes pseudo-périodiques, le premier est apériodique donc ne convient pas. Compte tenu des conditions initiales, les portraits commencent sur l'axe des ordonnées. Le 4ème ne tourne donc pas dans le sens horaire donc est impossible. **Le seul portrait compatible est le** c) compte tenu du nombre plus important de passages par 0, de même que l'ordre de grandeur du décrément logarithmique.

II. Modélisation électrique d'une isolation thermique *(d'après CCP MP 2016)*

1.

En régime stationnaire, un condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert. Le circuit se limite donc aux deux résistances R_1 et R_2.
On a donc : $\boxed{u_{2\,\infty}(t) = R_2\, i(t)}$.



2. On utilise des associations dérivation et série : $\underline{Z} = \left(j\omega C_1 + \left(R_1 + \left(j\omega C_2 + \frac{1}{R_2}\right)^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1}$, d'où en développant :

$$\underline{Z} = \left(j\omega C_1 + \frac{j\omega C_2 R_2 + 1}{j\omega\, C_2R_2R_1 + R_1 + R_2}\right)^{-1} \quad \text{donc} \quad \boxed{\underline{Z} = \frac{R_1 + R_2 + j\omega\, C_2R_2R_1}{1 + j\omega\left((R_1+R_2)C_1 + R_2C_2\right) + (j\omega)^2\, C_1C_2R_1R_2}}.$$

3. a) On a $\underline{U}_1(j\omega) = \underline{Z}\, I_0$ et $\underline{U}_1(0) = (R_1+R_2)\, I_0$ donc

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{1 + j\omega\,\frac{C_2R_2R_1}{R_1+R_2}}{1 + j\omega\left((R_1+R_2)C_1 + R_2C_2\right) + (j\omega)^2\, C_1C_2R_1R_2}}.$$

b) On a $\boxed{\lim\limits_{\omega\to 0} \underline{H} = 1}$ et $\boxed{\lim\limits_{\omega\to\infty} \underline{H} = 0}$. Il s'agit donc d'un **filtre passe-bas**.

c) En notant le gain $G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|$, on a par définition $G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$. En échelles logarithmiques cela s'écrit $G_{\mathrm{dB}}(\omega_c) = G_{\mathrm{dB\,max}} - 20\log\sqrt{2} = G_{\mathrm{dB\,max}} - 3,0\,\mathrm{dB}$. Graphiquement, on a $G_{\mathrm{dB\,max}} \approx 0$ et donc $G_{\mathrm{dB}}(\omega_c) \approx -3\mathrm{dB}$. On obtient $\underline{\omega_c \approx 8\times 10^{-5}\ \mathrm{rad.s^{-1}}}$.

4. a) On a en régime sinusoïdal forcé $\underline{u}_1 = \underline{Z}\,\underline{i}$ donc d'après **2.** :

$$\Big(1 + j\omega\left((R_1+R_2)C_1 + R_2C_2\right) + (j\omega)^2\, C_1C_2R_1R_2\Big)\ \underline{u}_1 = \left(R_1 + R_2 + j\omega\, C_2R_2R_1\right)\, \underline{i}\,,$$

ce qui conduit d'un point-de-vue temporel à l'**équation différentielle linéaire à coefficients constants** :

$$\boxed{\frac{1}{\omega_0^2}\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{\omega_0 Q}\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + u_1 = (R_1+R_2)\, i + C_2R_2R_1\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$$

$$\text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}{(R_1+R_2)C_1 + R_2C_2}}.$$

b) Pour un régime pseudopériodique, le temps caractéristique est $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ donc ici $\boxed{\tau = \frac{2R_1R_2C_1C_2}{(R_1+R_2)C_1 + R_2C_2}}$.

c) On peut ré-écrire $\tau = \frac{2C_1C_2}{\frac{C_1}{R_2} + \frac{C_1+C_2}{R_1}}$. Ainsi, en augmentant R_2 on augmente τ. Donc l'isolation par l'extérieur **rallonge la durée de vie des régimes transitoires**, donc rend le système plus lent à atteindre un régime permanent recherché donné.