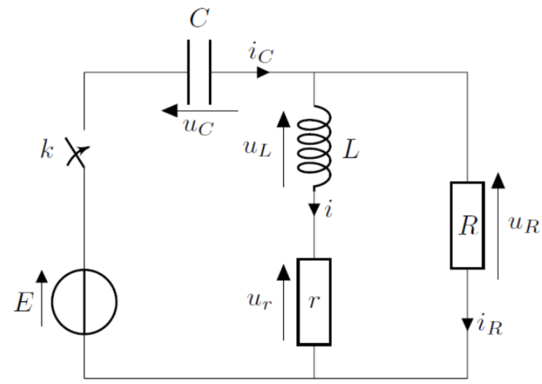
# ÉLECTRICITÉ : Régimes transitoires et sinusoïdal forcé

*Soignez la présentation et la rédaction, qui doit être complète et concise. Tout résultat doit être justifié, et mis en valeur. Les résultats littéraux doivent être homogènes. Les résultats numériques doivent avoir un nombre de chiffres significatifs vraissemblable. Les schémas doivent être clairs, suffisamment grands et lisibles. Si vous n'arrivez pas à montrer un résultat, admettez-le clairement et poursuivez.*

**CALCULATRICES AUTORISÉES**

## I. Détermination des caractéristiques d'un circuit

On considère le circuit ci-dessous. Pour $t < 0$, l'interrupteur $k$ est ouvert, le condensateur $C$ est déchargé, et le circuit est en régime stationnaire. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur $k$.




**1.** Déterminer l'intensité $i$ du courant traversant la bobine juste avant la fermeture de l'interrupteur (instant $t = 0^-$), juste après la fermeture de l'interrupteur (instant $t = 0^+$), puis lorsque le régime permanent stationnaire est atteint ($t \to +\infty$).

**2.** Établir l'équation différentielle qui régit l'évolution du courant $i(t)$ après la fermeture de $k$ ($t > 0$), sans passer par la représentation complexe en régime sinusoïdal forcé. Montrer que cette équation différentielle peut se mettre sous la forme canonique suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\, i = 0$$

et donner les expressions de la pulsation propre $\omega_0$ et du facteur de qualité $Q$.

**3.** À quelle condition sur $r$, $R$, $L$ et $C$ a-t-on un régime pseudo-périodique ? On supposera dans toute la suite que cette condition est vérifiée.

**4.** Quelle est alors la forme de la solution $i(t)$ ? Déterminer la condition initiale $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+)$, puis en déduire l'expression complète explicite de $i(t)$ en fonction des paramètres du problème.
Préciser l'expression du temps caratéristique $\tau$ du régime transitoire.

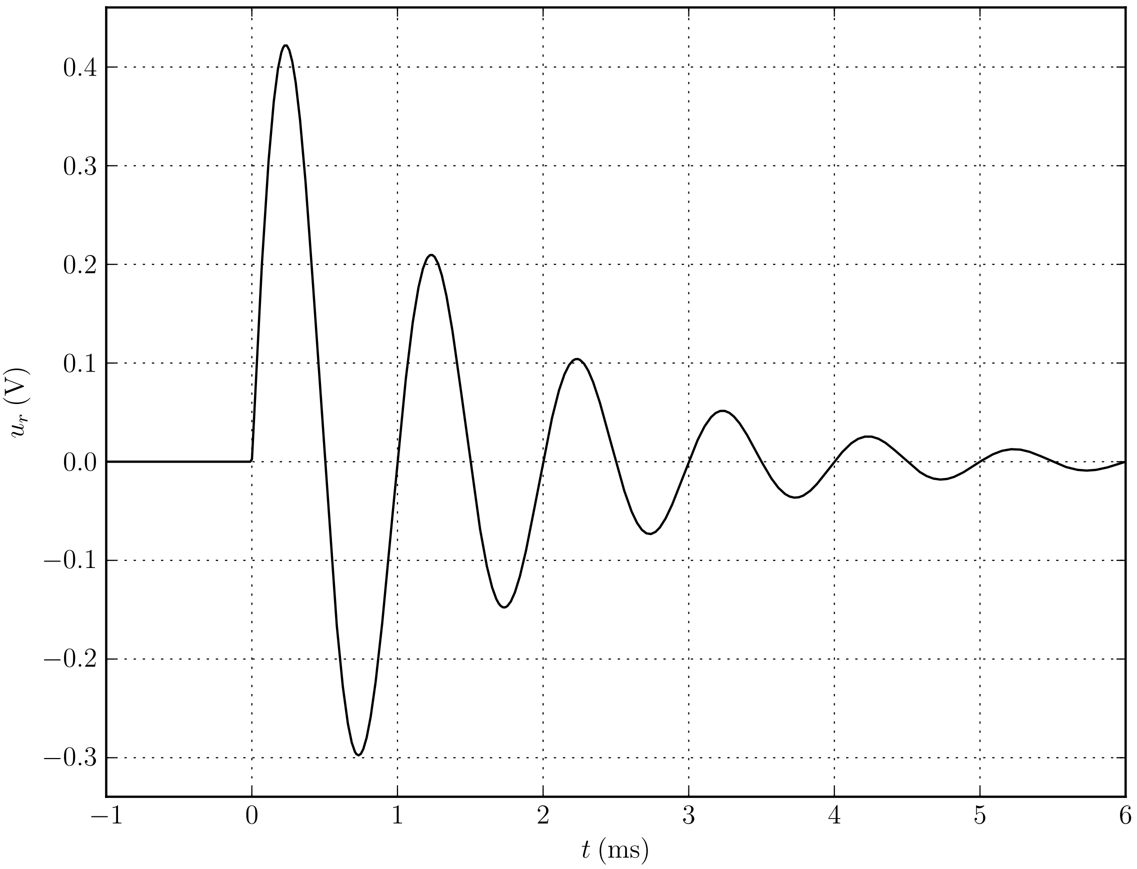
### Étude expérimentale

Grâce à un oscilloscope, on observe l'évolution de la tension $u_r(t)$ ci-dessous.

**5.** Mesurer graphiquement la pseudo-période $T$ du phénomène sur cet oscillogramme.
Définir le décrément logarithmique de $u_r$, noté $\delta$, et le mesurer graphiquement.

**6.** Établir l'expression théorique de $\delta$ en fonction de $T$ et $\tau$, puis en fonction du facteur de qualité $Q$ uniquement. En déduire la valeur du facteur de qualité.

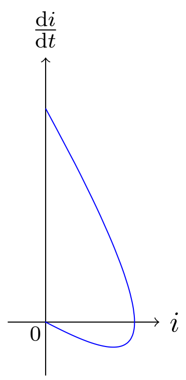
**7.** Calculer la pulsation propre $\omega_0$ du circuit.



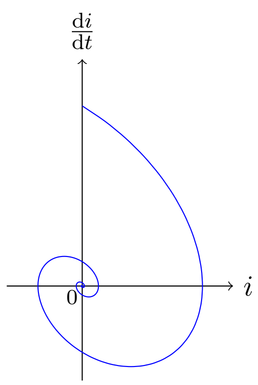

### Trajectoire de phase

**8.** Peut-on observer l'allure du portrait de phase associé à $i(t)$ à l'aide de l'oscilloscope. Si oui, indiquer comment (représenter le schéma du montage avec les branchements de l'oscilloscope). Sinon expliquer pourquoi.

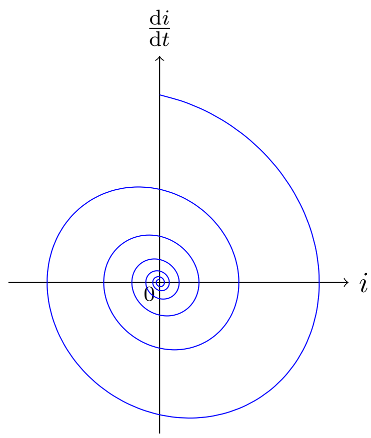
**9.** Parmi les 4 trajectoires de phase suivantes, indiquer si une d'entre elles pourrait convenir pour le système étudié ici, vu l'allure de $u_r(t)$ observée précédemment. Justifier brièvement pour chaque trajectoire de phase.



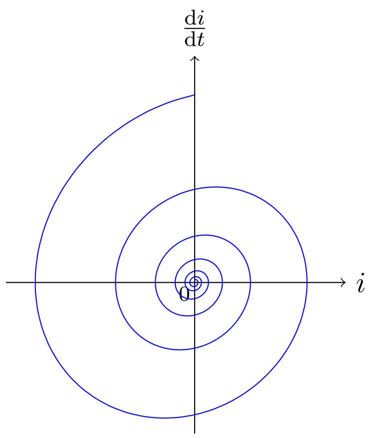

a)




b)



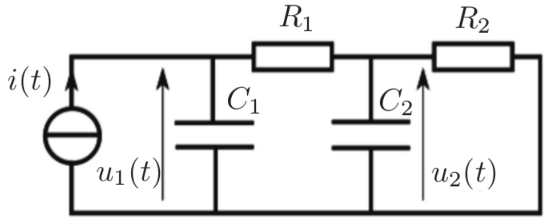

c)




d)

## II. Modélisation électrique d'une isolation thermique

Les équations de diffusion thermique présentent des analogies fortes avec celle de l'électrocinétique en régime lentement variable. Par un réseau électrique, on modélise ici le comportement thermique d'une pièce unique exposée à un milieu extérieur de température fixée, chauffée à l'aide d'un radiateur extérieur, et dont les murs peuvent être couverts d'une couche d'isolant. Le but est d'étudier le comportement dynamique de ce système via sa fonction de transfert.




- Le courant électromoteur $i(t)$ correspond à la puissance thermique du radiateur ;
- les résistances électriques $R_1$ et $R_2$ correspondent respectivement aux résistances thermiques des parties intérieure et extérieure des murs ;
- les capacités électriques $C_1$ et $C_2$ correspondent respectivement aux capacités thermiques de l'air et du mur ;
- et les tensions $u_1$ et $u_2$ correspondent respectivement aux différences de température entre l'intérieur et l'extérieur d'une part, et entre le coeur du mur (température moyenne) et l'extérieur d'autre part.

**1.** Que devient ce circuit électrique en régime permanent stationnaire, qu'on supposera atteint au bout d'un temps très long ? Exprimer alors la tension $u_{2\,\infty} = \lim\limits_{t\to\infty} u_2(t)$.

Afin d'étudier le comportement du circuit en régime variable, on se place en régime sinusoïdal forcé. Chaque variable est représentée par une fonction $x(t)$ de pulsation $\omega$ dont la grandeur complexe et l'amplitude complexe associées sont notées respectivement $\underline{x}(t)$ et $\underline{X}$. Elles vérifient :

$$x(t) = X_0\,\cos(\omega t + \varphi) = \mathrm{Re}(\underline{x}(t)) \quad \text{avec} \quad \underline{x}(t) = X_0\,e^{j(\omega t+\varphi)} = \underline{X}\,e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{X} = X_0\,e^{j\varphi}\,.$$

La référence de phase sera prise sur le courant électromoteur délivré par le générateur : $i(t) = I_0\cos(\omega t)$.

**2. Impédance.**
Calculer l'impédance $\underline{Z}$ équivalente à l'ensemble du dipôle soumis au générateur, telle que $\underline{U}_1 = \underline{Z}\,I_0$. On la mettra sous la forme d'un rapport de deux polynômes pour la variable $j\omega$, dont le dénominateur sera sans dimension.

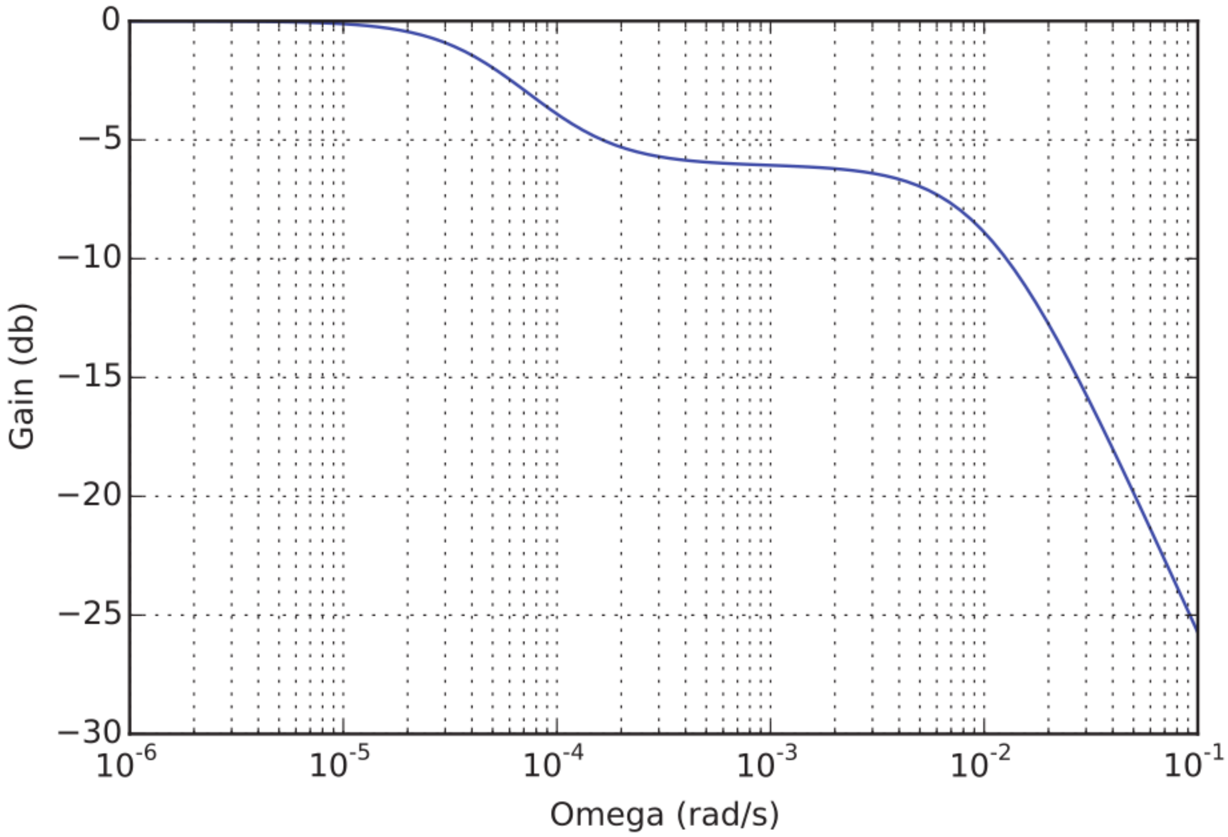
**3. Fonction de transfert.**
La réponse du système au chauffage est interprétée comme pour un filtre. On définit la fonction de transfert du filtre de la façon suivante :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_1(j\omega)}{\underline{U}_1(0)}\,.$$

**a)** Donner l'expression de $\underline{H}(j\omega)$ en fonction des paramètres $R_1$, $R_2$, $C_1$, $C_2$ et de $j\omega$.

**b)** Étudier le comportement asymptotique du filtre à basse fréquence ($\omega \to 0$) et haute fréquence ($\omega \to \infty$). Quelle est la nature de ce filtre ?

**c)** Dans la figure ci-dessous, on présente le diagramme de Bode en gain, c'est-à-dire la courbe du gain en décibel $G_{\mathrm{dB}}(\omega)$ dans un diagramme semi-logarithmique (l'axe des pulsations est logarithmique). Rappeler la définition de la pulsation de coupure $\omega_c$. Déterminer $\omega_c$ graphiquement.




**4. Equation différentielle.**

**a)** Établir l'équation différentielle reliant la tension $u_1(t)$ au courant $i(t)$. La mettre sous forme canonique et donner l'expression de la pulsation propre $\omega_0$ et du facteur de qualité $Q$ en fonction des paramètres $R_1$, $R_2$, $C_1$, $C_2$.

**b)** Exprimer le temps caractéristique $\tau$ d'amortissement du régime transitoire (qu'on supposera pseudo-périodique pour simplifier).

**c)** On réalise une isolation par l'extérieur, ce qui revient à augmenter la résistance $R_2$. Comment cela modifie-t-il le temps caractéristique $\tau$ (augmentation ou diminution) ?
Quelles sont les conséquences en terme de chauffage ?

* * * Fin de l'épreuve * * *