

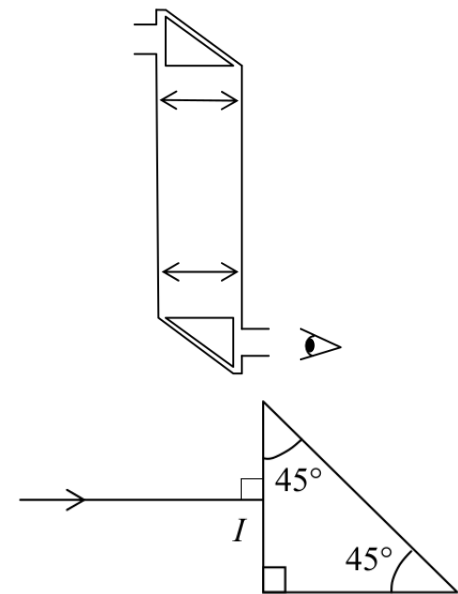
OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE et ÉLECTRICITÉ

Soignez la présentation et la rédaction, qui doit être complète et concise. Tout résultat doit être justifié, et mis en valeur. Les résultats littéraux doivent être homogènes. Les résultats numériques doivent avoir un nombre de chiffres significatifs vraisemblable. Les schémas doivent être clairs, suffisamment grands et lisibles. Si vous n'arrivez pas à montrer un résultat, admettez-le clairement et poursuivez.

CALCULATRICES AUTORISÉES

I. Étude d'un périscope

En immersion peu profonde, le sous-marin peut utiliser un périscope pour examiner la surface de la mer. Nous nous proposons dans cette partie d'en étudier le fonctionnement simplifié. La figure ci-contre représente le principe général du périscope étudié, constitué de deux prismes identiques et de deux lentilles, plus un oculaire non représenté situé entre le prisme et l'œil.



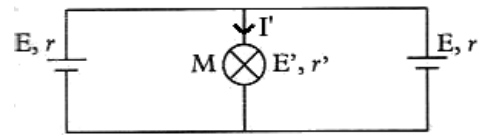
1. Les deux prismes du périscope sont identiques, seule leur orientation diffère ; ils sont constitués d'un verre d'indice $n = 1,5$ et sont plongés dans l'air d'indice 1 (figure ci-contre).

On considère le rayon incident arrivant sous incidence normale sur la face d'entrée de l'un des prismes. Refaire sur la copie le schéma de la figure ci-contre en le complétant (dessiner la marche du rayon). Justifier soigneusement par un calcul les constructions au niveau de chaque interface.

2. Dans la suite et par souci de simplification, nous remplacerons les prismes par des miroirs plans inclinés à 45° . Le schéma équivalent du périscope est fourni dans le document réponse en annexe. Représenter sur ce schéma l'image $\overrightarrow{A_1B_1}$ de l'objet \overrightarrow{AB} par le miroir \mathcal{M}_1 , puis l'image $\overrightarrow{A_2B_2}$ de $\overrightarrow{A_1B_1}$ par la lentille \mathcal{L}_1 de centre O_1 , puis l'image $\overrightarrow{A_3B_3}$ de $\overrightarrow{A_2B_2}$ par la lentille \mathcal{L}_2 de centre O_2 et enfin l'image $\overrightarrow{A'B'}$ de $\overrightarrow{A_3B_3}$ par le miroir \mathcal{M}_2 . On rappelle que le document réponse doit être joint à la copie.
3. On donne les longueurs algébriques (ces longueurs ne correspondent pas au schéma du document annexe) :
 $\overline{AM_1} = 100 \text{ m}$; $\overline{O_1M_1} = -30 \text{ cm}$; $f'_1 = 50 \text{ cm}$; $\Delta = \overline{F'_1F_2} = 20 \text{ cm}$; $f'_2 = 40 \text{ cm}$; $\overline{O_2M_2} = 90 \text{ cm}$. M_1 et M_2 sont les centres des miroirs.
 Calculer les positions des images : $\overline{O_1A_2}$, $\overline{O_2A_3}$ et $\overline{M_2A'}$ ainsi que le grandissement du périscope $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$. L'image finale est-elle de même sens que l'objet ou renversée ?
4. Citer une méthode expérimentale pour mesurer la distance focale d'une lentille convergente et expliquer rapidement son principe.

II. Alimentation d'un moteur

Deux générateurs identiques de force électromotrice $E = 9\text{ V}$ et de résistance interne $r = 2\ \Omega$ alimentent un moteur \mathcal{M} de force contre-électromotrice $E' = 5\text{ V}$ et de résistance interne $r' = 1\ \Omega$.



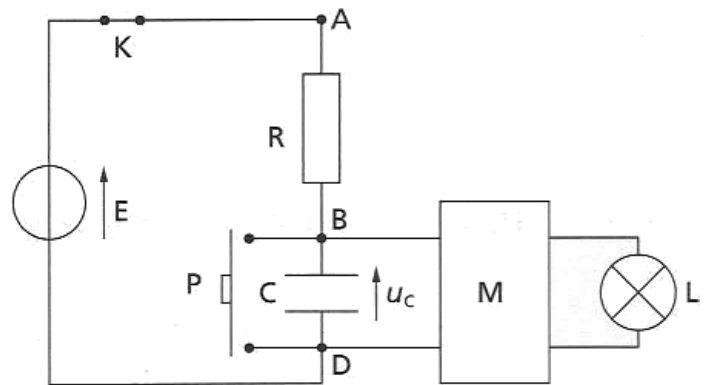
1. Représenter la caractéristique courant-tension de l'un des générateurs en convention générateur, puis celle du moteur en convention récepteur.
2. Déterminer l'intensité I' qui traverse le moteur.
3. Calculer la puissance électrique reçue par le moteur, ainsi que celle fournie par chaque générateur.

III. Fonctionnement d'une minuterie

On étudie le principe de fonctionnement d'une minuterie permettant d'éteindre une lampe automatiquement au bout d'une durée t_0 réglable.

Dans le montage, le composant M permet l'allumage de la lampe L tant que la tension aux bornes du condensateur est inférieure à une tension limite, notée U_ℓ .

On prendra pour tout l'exercice : $E = 30\text{ V}$ et $U_\ell = 20\text{ V}$, $R = 100\text{ k}\Omega$ et $C = 200\ \mu\text{F}$.



Le composant électronique M possède une alimentation électrique propre (non représentée sur le schéma) qui lui fournit l'énergie nécessaire à l'allumage de la lampe. On admettra que le composant électronique M ne perturbe pas le fonctionnement du circuit RC .

À l'instant initial $t = 0$, le condensateur est déchargé. On ferme l'interrupteur K , et le bouton-poussoir P est relâché.

1. Établir l'équation différentielle donnant les variations de u_c aux bornes du condensateur. Que vaut le temps caractéristique τ du système ?
2. Établir l'expression de la solution $u_c(t)$. Quelle est la valeur de u_c en régime permanent ?
3. Représenter graphiquement l'allure de u_c .
4. Exprimer l'instant t_ℓ auquel la tension aux bornes du condensateur atteint la valeur limite U_ℓ , en fonction de U_ℓ , E et τ . Calculer t_ℓ numériquement.
5. On a choisi $U_\ell = 20\text{ V}$ pour obtenir une durée d'allumage t_ℓ voisine de τ . Pour quelle raison choisir t_ℓ très supérieur à τ n'aurait-il pas été judicieux pour un tel montage ?
6. Quel(s) paramètre(s) du montage peut-on modifier sans changer le générateur afin d'augmenter la durée d'allumage de la lampe ?

IV. Principe d'un hygromètre capacitif

Certains oxydes métalliques comme Al_2O_3 (alumine) sont hygroscopiques, c'est-à-dire qu'ils peuvent absorber l'eau contenue dans un gaz humide. En conséquence, leurs propriétés électriques, notamment leur permittivité diélectrique ϵ sont modifiées. L'utilisation de ces substances comme isolant électrique d'un condensateur permet de réaliser des capacités C_h qui dépendent de l'humidité relative h_r selon la loi approchée :

$$C_h = C_0 (1 + ah_r)$$

où C_0 et a sont deux constantes.

Ce type de condensateur est réalisé à partir d'une lame d'aluminium constituant l'une des armatures, sur laquelle est déposée une couche d'alumine poreuse. La seconde armature du condensateur est une lame d'or. La mesure de la capacité de ce type de condensateur constitue actuellement une technique fiable et précise pour déterminer l'humidité relative.

Etudions dans cette partie un montage électrocinétique permettant la mesure de C_h . Le montage complet est représenté sur la figure 1 et ses différents éléments seront abordés successivement au cours du problème.

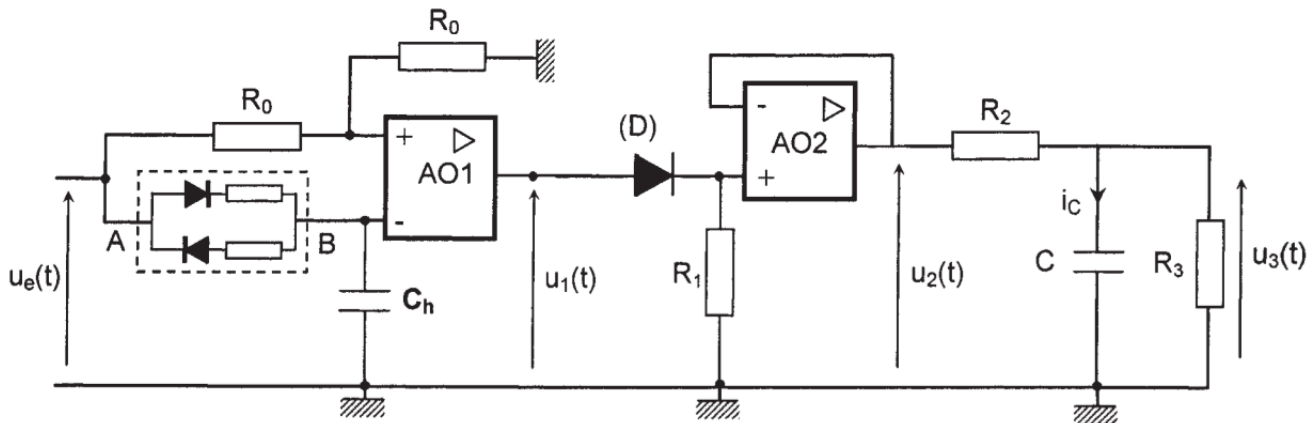


Figure 1 : Schéma électrique complet de l'hygromètre.

Les diodes utilisées (figure 2) sont supposées idéales, ce qui signifie :

- $i_d = 0$ lorsque $u_d \leq 0$ (état bloqué)
- $u_d = 0$ lorsque $i_d \geq 0$ (état passant)

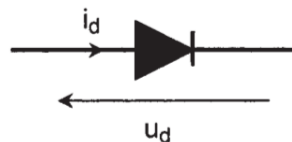


Figure 2 : Diode.

1. La capacité étudiée varie de 110 pF à 250 pF lorsque l'humidité relative h_r passe de la valeur 0 à la valeur 1. Calculer les valeurs numériques de C_0 et a .

Considérons le dipôle (AB) représenté sur la figure 3a, pour lequel (D_a) et (D_b) sont deux diodes idéales identiques.

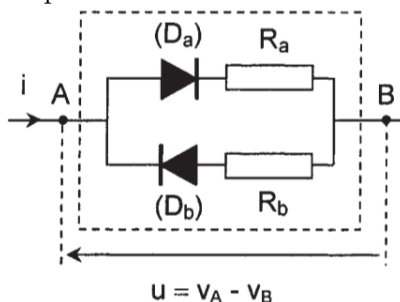


Figure 3a.

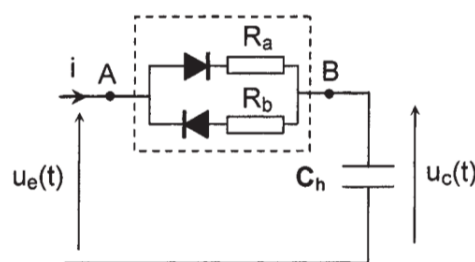


Figure 3b.

2. Montrer que les deux diodes ne peuvent pas être simultanément dans le même état.

Déterminer, selon le signe de la tension u , le résistor ohmique équivalent à (AB).

Ce dipôle est maintenant inséré dans le montage de la figure 3b, dans lequel $u_e(t)$ est une tension nulle pour $t < 0$ et $t > T_1$ et égale à une constante $E > 0$ lorsque $0 < t < T_1$. À l'instant $t = 0$, le condensateur est déchargé.

3. Établir l'équation différentielle vérifiée par $u_c(t)$ puis exprimer sa solution pour $0 < t < T_1$, en faisant apparaître une constante de temps, notée τ_a dont on donnera l'expression. On expliquera succinctement le choix du résistor.
4. À partir de l'instant T_1 , $u_e(t)$ redevient nulle. Quelle est alors l'équation différentielle vérifiée par $u_c(t)$? Expliciter dans ce cas $u_c(t)$ pour $t > T_1$, en fonction des paramètres E , T_1 , R_a , R_b et C_h . On pourra aussi introduire un temps τ_b .
5. Représenter l'allure de $u_c(t)$ en fonction du temps dans le cas particulier où $R_b = 10R_a$. Faire figurer sur ce schéma les asymptotes et les points remarquables.

Dans le montage de la figure 4a, l'Amplificateur Opérationnel (AO1) est supposé idéal et fonctionne en régime de saturation. Cela signifie que :

- $u_1(t) = +U_{SAT}$ si les potentiels des entrées + et - vérifient $v_- < v_+$,
- $u_1(t) = -U_{SAT}$ si $v_- > v_+$,

où U_{SAT} est une tension de saturation de l'ordre de 15 V. De plus cela implique que **les courants pénétrant dans les entrées sont nuls** : $i_+ = i_- = 0$.

La tension $u_e(t)$ est maintenant une tension créneau périodique de période T , maintenue à une valeur constante $E > 0$ pendant une durée T_1 ($T_1 < T$) et nulle pendant le reste de la période, schématisée sur la figure 4b.

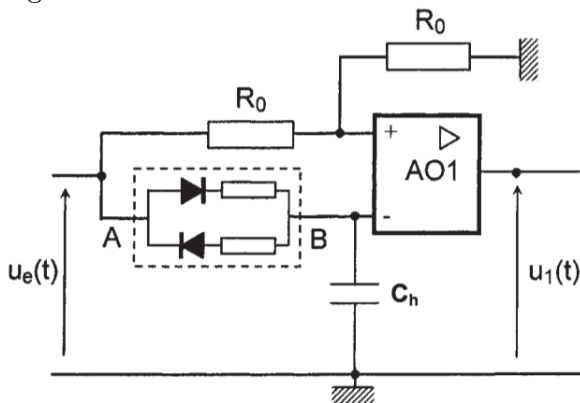


Figure 4a.

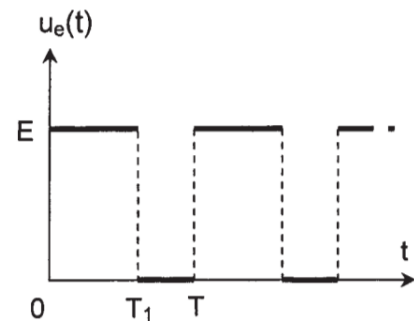


Figure 4b.

Le régime permanent est supposé établi : **toutes les tensions sont périodiques avec la même période T** . Le fonctionnement du montage sera donc étudié seulement entre les instants 0 et T . Cette période est choisie de sorte que $R_b C_h \ll T$, ce qui entraîne que le condensateur est déchargé à la fin de chaque période.

6. Calculer le potentiel v_+ en fonction de u_e .
7. Déterminer, en fonction de τ_a notamment, l'instant T_2 qui correspond au basculement de $u_1(t)$ de la valeur $+U_{SAT}$ à la valeur $-U_{SAT}$. On supposera que ce basculement intervient durant la phase où $u_e(t) = E$, c'est-à-dire que τ_a est tel que $T_2 < T_1$. Cette condition sera supposée vérifiée par la suite.
8. Évaluer la valeur minimale de T_1 assurant le fonctionnement correct du montage, sachant que $R_a = 2,70 \text{ M}\Omega$. Calculer les deux valeurs extrêmes de T_2 qui correspondent respectivement à $C_h = 110 \text{ pF}$ et $C_h = 250 \text{ pF}$.
9. En choisissant les valeurs numériques suivantes : $T = 2,0 \text{ ms}$, $T_1 = 1,0 \text{ ms}$, $C_h = 110 \text{ pF}$, $R_a = R_b = 2,70 \text{ M}\Omega$, $E = 5,0 \text{ V}$ et $U_{SAT} = 12,5 \text{ V}$, représenter à l'échelle les tensions $u_c(t)$ et $u_1(t)$ sur un même graphe, sur un intervalle de temps de deux périodes.

Le montage représenté sur la figure 5 est destiné à mettre en forme la tension $u_1(t)$ délivrée par le circuit précédent. Il comprend une diode (D) idéale et un amplificateur opérationnel idéal (AO2) fonctionnant en régime linéaire. Cela signifie que les potentiels des entrées + et - vérifient $v_- = v_+$, et comme précédemment que **les courants pénétrant dans les entrées sont nuls** : $i_+ = i_- = 0$. Par conséquent, dans ce montage appelé *montage suiveur*, la tension de sortie u_2 est égale à la tension aux bornes de la résistance R_1 : $u_2 = v_+$.

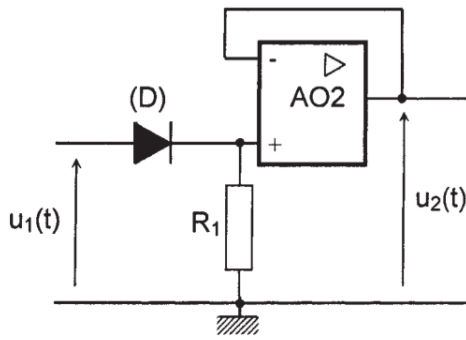


Figure 5.

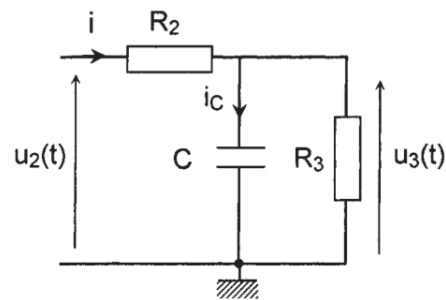


Figure 6.

10. Déterminer, selon le signe de $u_1(t)$, l'expression de la tension $u_2(t)$ en sortie de l'AO2.
Représenter le chronogramme de $u_2(t)$ sur un intervalle de temps de deux périodes.

Cette tension u_2 est appliquée à l'entrée du filtre passif représenté sur la figure 6 et constitué de deux résistances R_2 et R_3 , ainsi que d'un condensateur de capacité C . **La fonction de ce filtre est de produire une tension $u_3(t)$ quasi-constante pour évaluer la valeur moyenne de $u_2(t)$.**

Le régime permanent étant établi, la tension $u_3(t)$ est périodique de période T : elle évolue entre une valeur minimale U_{\min} atteinte aux temps nT (n entier) et une valeur maximale U_{\max} atteinte aux temps $nT + T_2$, où T_2 est la durée déterminée à la question 7.

Etant donnée une fonction $f(t)$ périodique de période T , sa valeur moyenne est définie par :

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt.$$

11. Calculer la valeur moyenne de $u_2(t)$ en fonction de U_{SAT} , T et T_2 .
12. Montrer que la valeur moyenne de l'intensité qui traverse le condensateur est nulle. En déduire la valeur moyenne $\langle u_3(t) \rangle$ en fonction de U_{SAT} , T , T_2 , R_2 et R_3 .
13. Au contact de l'air ambiant d'un local, le dispositif délivre une tension moyenne $\langle u_3 \rangle = 3,72 \text{ V}$. Déterminer l'humidité relative h_r dans le local, en utilisant les données numériques suivantes : $R_2 = 56,0 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 140 \text{ k}\Omega$, $R_a = 2,70 \text{ M}\Omega$, $U_{\text{SAT}} = 12,5 \text{ V}$ et $T = 2,0 \text{ ms}$.

Dans la suite, on souhaite quantifier l'ondulation de $u_3(t)$ autour de sa valeur moyenne. Afin d'alléger les expressions littérales intervenant dans les questions suivantes, posons la quantité

$$\tau = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} C.$$

14. Écrire l'équation différentielle du premier ordre à laquelle obéit $u_3(t)$ lorsque $0 < t < T_2$. Expliciter sa solution en fonction de U_{\min} , U_{SAT} , R_2 , R_3 et τ . (ne pas chercher à déterminer U_{\min} dans cette question).
15. Quelle est l'équation différentielle satisfaite par $u_3(t)$ lorsque $T_2 < t < T$? Déterminer sa solution en fonction de U_{\max} , τ et T_2 . (sans chercher à déterminer U_{\max} dans cette question).
16. Montrer que U_{\max} et U_{\min} prennent les valeurs suivantes :

$$U_{\max} = \frac{R_3}{R_2 + R_3} U_{\text{SAT}} \frac{1 - e^{-\frac{T_2}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} \quad \text{et} \quad U_{\min} = \frac{R_3}{R_2 + R_3} U_{\text{SAT}} e^{-\frac{T-T_2}{\tau}} \frac{1 - e^{-\frac{T_2}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}}$$

17. Le *taux d'ondulation* ρ est défini par le quotient $\rho = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{\langle u_3(t) \rangle}$. Déterminer l'expression du taux ρ en fonction de T , T_2 et τ .
Application numérique : calculer ρ en prenant les deux valeurs extrêmes de T_2 , avec pour valeurs numériques $T = 2,0 \text{ ms}$ et $\tau = 20 \text{ ms}$. Conclure.
18. Sur quel(s) facteur(s) est-il possible de jouer pour diminuer le taux d'ondulation ρ ?

* * * FIN DE L'ÉPREUVE * * *

(pensez à rendre votre annexe avec votre NOM et Prénom)

ANNEXE - NOM Prénom :

Prière de faire en sorte que le tracés soient visibles (couleurs, épaisseur...).

