

THERMODYNAMIQUE et INDUCTION

I. Dimensionnement d'une installation de liquéfaction (d'après Mines Ponts PSI II 2015)

I.1. Dimensionnement des étages de compression

1. Pour un gaz parfait diatomique à des **températures proches de l'ambiante, on a cinq degrés de liberté effectifs (le degré de vibration étant gelé) et autant de termes quadratiques dans l'énergie d'une molécule** : trois de translation et deux de rotation (la rotation autour de l'axe N-N a un moment d'inertie négligeable). En vertu du **théorème d'équipartition**, l'énergie moyenne d'une molécule est donc $\langle E_i \rangle = 5 \times \frac{1}{2} k_B T$.

Pour n moles de gaz, on a donc $C_v = 5 \times \frac{k_B n N_A}{2} = 5 \times \frac{nR}{2}$. Et, d'après la relation de Mayer, $C_p = C_v + nR = 7 \times \frac{nR}{2}$, soit $\gamma = \frac{7}{5} = 1,4$.

2. Pour une compression adiabatique réversible donc isentropique, on a la relation de Laplace $P^{1-\gamma} T^\gamma = C^{te}$, ce qui donne entre l'entrée et la sortie d'un compresseur $\left(\frac{P_{sortie}}{P_{entrée}}\right)^{1-\gamma} \left(\frac{T_{sortie}}{T_{entrée}}\right)^\gamma = r^{1-\gamma} \left(\frac{T_{sortie}}{T_E}\right)^\gamma = 1$, soit

$$\boxed{T_{sortie} = T_E r^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \Leftrightarrow \boxed{r = \left(\frac{T_{sortie}}{T_E}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

Par ailleurs, le nombre d'étages est imposé par les contraintes de pression : $N = \frac{1}{\log r} \log\left(\frac{P_{sortie}}{P_{entrée}}\right)$. Or la température de sortie T_{sortie} ne doit pas dépasser $T_{max} = 400$ K donc

$$r \leq r_{max} = \left(\frac{T_{max}}{T_E}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \Rightarrow \boxed{N \geq N_{min} = \frac{(\gamma-1)}{\gamma \log \frac{T_{max}}{T_E}} \log\left(\frac{P_{sortie}}{P_{entrée}}\right) = 5,}$$

n arrondissant à l'entier immédiatement supérieur. Il faut donc au minimum **5 étages de compression** pour respecter les contraintes de sécurité en température de N_2 .

3. L'énergie u est une **fonction d'état, ses variations ne dépendent pas du chemin suivi**. Pour une transformation infinitésimale supposée **réversible** (et sans variation de l'énergie mécanique macroscopique, cinétique ou potentielle de pesanteur), on a donc d'après les premier et second principes :

$$du = \delta q_{rev} + \delta w_{rev} \text{ avec } ds = \frac{\delta q_{rev}}{T} \text{ et } \delta w_{rev} = -p dv \text{ d'où } \boxed{du = T ds - p dv}$$

Remarque : cette relation est toujours vraie pour une transformation quelconque (sans variation de l'énergie mécanique macroscopique) puisque ce ne sont que des variations de fonctions d'état qui interviennent. On peut donc la réutiliser dans le cadre d'une transformation irréversible.

L'irréversibilité dans le compresseur va modifier la température de sortie T_{sortie} par rapport au cas réversible, reste à savoir dans quel sens. Lorsque l'on démontre la relation de Laplace, la transformation étant isentropique on écrit d'après l'identité thermodynamique ci-dessus :

$$du + p dv = c_v d(\ln(p^{1-\gamma} T^\gamma)) = T ds = 0$$

Pour une transformation adiabatique mais maintenant irréversible on écrit donc

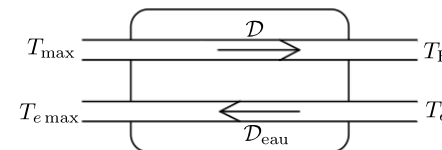
$$du + p dv = c_v d(\ln(p^{1-\gamma} T^\gamma)) = T ds = T \delta s_p > 0,$$

ce qui après intégration entre l'entrée et la sortie du compresseur conduit à

$$\left(\frac{P_{sortie}}{P_{entrée}}\right)^{1-\gamma} \left(\frac{T_{sortie}}{T_E}\right)^\gamma = r^{1-\gamma} \left(\frac{T_{sortie}}{T_E}\right)^\gamma > 1 \text{ d'où } r = \frac{1}{a} \left(\frac{T_{sortie}}{T_E}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \text{ avec } \boxed{a > 1}$$

une constante caractéristique de l'irréversibilité dans le compresseur. Ainsi, **pour un même rapport de compression r , la température de sortie est plus grande dans le cas irréversible**. On en déduit que $r_{max} = \frac{1}{a} \left(\frac{T_{max}}{T_E}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ est inférieur au cas réversible, donc N_{min} sera supérieur au cas réversible. **En d'autres termes il faut décomposer encore plus la compression pour limiter la température haute.**

4. Physiquement, plus le débit d'eau est grand, moins l'eau est chaude en sortie du réfrigérant. Il faut donc un débit \mathcal{D}_{eau} minimal pour abaisser la température du diazote sans dépasser la limite $T_{e,max} = 350$ K.



Il n'y a pas de travail utile ni de pertes thermiques en dehors de l'échange entre les deux fluides, donc le premier principe industriel s'écrit

$$\Delta h = c_p (T_E - T_{max}) = \frac{\dot{Q}}{\mathcal{D}} \text{ et } \Delta h = c_e (T_{e,max} - T_e) = -\frac{\dot{Q}}{\mathcal{D}_{eau}}$$

respectivement pour le diazote d'une part et pour l'eau d'autre part, en notant \dot{Q} le transfert thermique par unité de temps reçu par le diazote et cédé par l'eau (négatif donc).

En combinant ces deux équations pour éliminer \dot{Q} , et en notant que $c_p = \frac{7R}{2M}$, on en déduit

$$\boxed{\frac{\mathcal{D}_{eau}}{\mathcal{D}} \Big|_{min} = \frac{7R}{2M} \frac{T_{max} - T_E}{c_e (T_{e,max} - T_e)} = 0,32}$$

I.2. Diagramme enthalpique du diazote

5. \mathcal{C}_1 est une **isotherme**. À basse pression, le gaz se comporte comme un gaz parfait et h n'est fonction que de la température (2nde loi de Joule), les isenthalpes se confondent avec les isothermes, on a donc une asymptote verticale à basse pression.
6. \mathcal{C}_2 est une **isentrope**. D'après la première identité thermodynamique démontrée en 3., on a $du = -p dv$ pour une isentrope, donc $dh = du + d(pv) = v dp$, ce qui peut se récrire $\boxed{\frac{d \ln p}{dh} = \frac{1}{pv} = \frac{M}{RT} > 0}$. **La pente est donc positive** (d'autant plus faible que la température est grande).
7. La courbe \mathcal{C}_3 se décompose en **courbe de rosée à droite** (vapeur à droite et mélange liquide-vapeur à gauche) et **courbe d'ébullition à gauche** (liquide à gauche et mélange à droite). Le point O est le point critique.
8. \mathcal{C}_4 est la courbe **isotitre**. Le diazote en M est dans un état diphasique liquide-vapeur, de titre massique en liquide $x = 0,1$, i.e. un mélange avec 10% de liquide et 90% de vapeur.

I.3. Dimensionnement de l'échangeur (E)

9. Pour un mélange diphasique de titre en liquide x , on a $\boxed{h_C = (1-x) h_{vap} + x h_{liq}}$.
10. En D, on extrait la fraction liquide du débit entrant : $\boxed{\mathcal{D}_m = x \mathcal{D}}$.
De même la fraction vapeur est ré-injectée dans le mélangeur : $\boxed{\mathcal{D}' = (1-x) \mathcal{D}}$ (conforme à la relation $\mathcal{D} = \mathcal{D}_m + \mathcal{D}'$).

11. a) On applique le même raisonnement que pour 4., l'échangeur étant de nouveau adiabatique. On obtient

$$D'(h_E - h_D) + D(h_B - h_A) = 0.$$

- b) La vanne impose une détente isenthalpique, donc $h_B = h_C = (1 - x)h_D + xh_{liq}$, car $h_{vap} = h_D$. En réinjectant cette relation dans la précédente, et en utilisant les relations entre débits du 10., on obtient finalement

$$(1 - x)h_E - h_A + xh_{liq} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{h_E - h_A}{h_E - h_{liq}}.$$

12. a) On lit sur le diagramme enthalpique (cf figure ci-contre) :

- $h_E = 515 \text{ kJ/kg}$ (isotherme $300 \text{ K} = 27^\circ\text{C}$, isobare 1,0 bar) ;
- $h_A = 495 \text{ kJ/kg}$ (isotherme $300 \text{ K} = 27^\circ\text{C}$, isobare 100 bar) ;
- $h_{vap} = 280 \text{ kJ/kg}$ (isotherme $77 \text{ K} = -196^\circ\text{C}$, isobare 1,0 bar, courbe de rosée) ;
- $h_{liq} = 85 \text{ kJ/kg}$ (isotherme $77 \text{ K} = -196^\circ\text{C}$, isobare 1,0 bar, courbe d'ébullition).

- b) La relation du 11.b) conduit donc à $x = 0,047$.

Pour un gaz parfait h ne dépend que de la température. On aurait donc $h_A = h_E$ et $x = 0$. Donc il n'y aurait pas de liquide du tout.

- c) D'après 9., on obtient $h_B = h_C = 271 \text{ kJ/kg}$.

Le point B est à l'intersection de l'isobare $p_A = 100 \text{ bar}$ et de l'enthalpie h_C . La température est de $T_B = -107^\circ\text{C}$, donc au point B, l'azote est bien sous forme de gaz (et même de fluide supercritique).

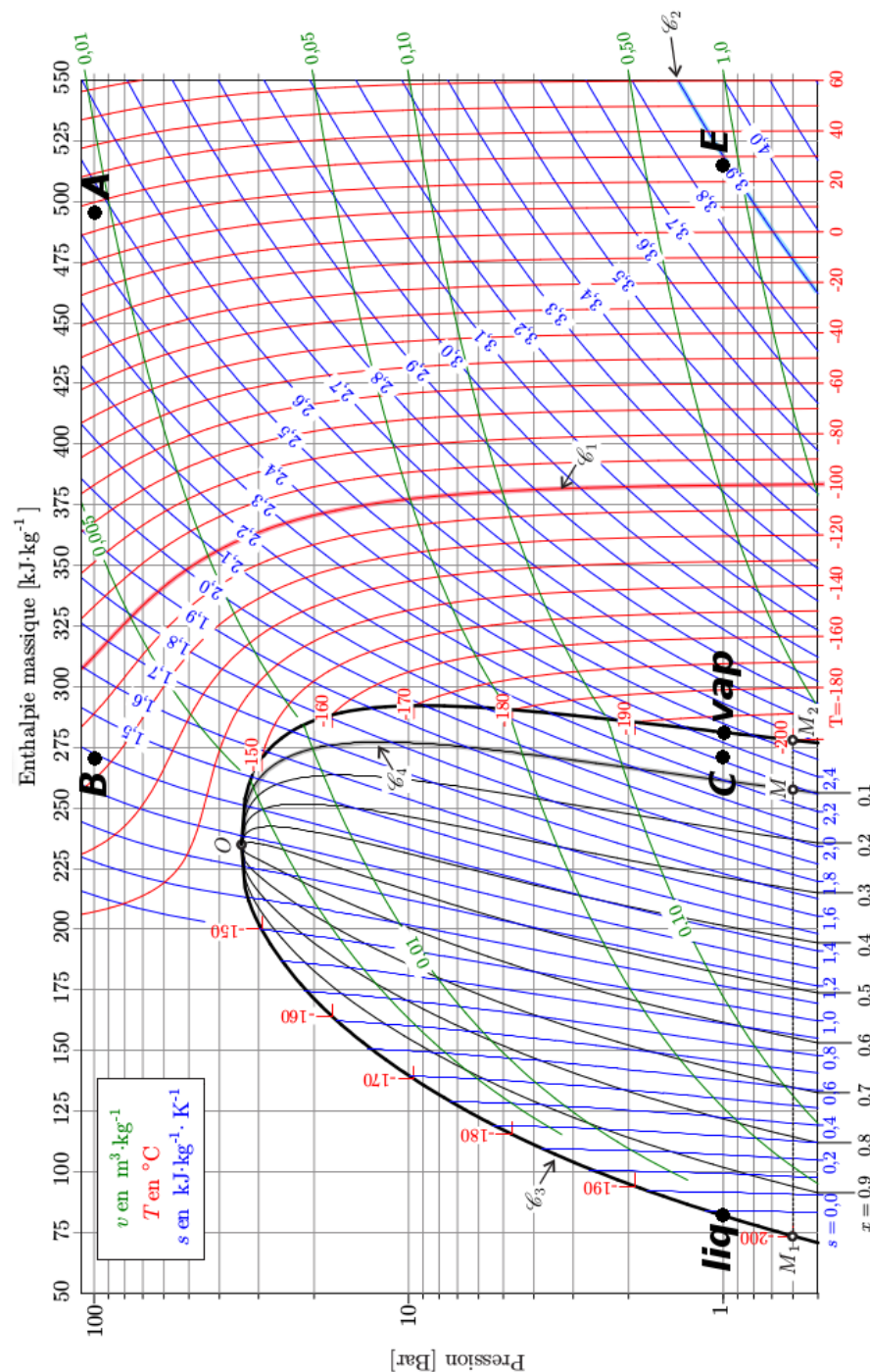
13. Notons \mathcal{P} la puissance mécanique totale apportée par les N compresseurs adiabatiques. Le débit de gaz dans les compresseurs est $\mathcal{D} = \frac{D_m}{x}$. Pour un compresseur le premier principe industriel s'écrit, en supposant le gaz parfait :

$$\frac{\mathcal{P}}{N\mathcal{D}} = \Delta h = c_p(T_{\max} - T_E) \Leftrightarrow \mathcal{P} = N \frac{D_m}{x} \frac{7R}{2M} (T_{\max} - T_E) = 3,3 \times 10^2 \text{ kW}.$$

Le débit volumique donné dans l'article est $\mathcal{D}_v = 1 \text{ L/h}$. On en déduit le volume massique grâce à la densité du diazote liquide,

$$\mathcal{D}_m = d \rho_{\text{eau}} \mathcal{D}_v = 2,25 \times 10^{-4} \text{ kg/s}$$

qui, par une règle de trois, donne $\mathcal{P} = 2,5 \text{ kW}$. L'ordre de grandeur est bien respecté.



II. Mesures de champs magnétiques (d'après Mines Ponts PSI II 2016)

II.1. La balance de Cotton

1. Le système formé des parties mobiles n'est soumis qu'à son poids et à la réaction de la liaison pivot. Le **théorème scalaire du moment cinétique** par rapport à l'axe Oz fixe s'écrit, dans le **référentiel terrestre** du laboratoire supposé galiléen,

$$0 = \vec{M}_{\text{pes}}(O) \cdot \hat{u}_z + \mathcal{M}_{\text{pivot}}^{Oz} = (\vec{OG} \wedge m_0 \vec{g}) \cdot \hat{u}_z + 0$$

car la liaison pivot est considérée parfaite. Ainsi

$$0 = (\vec{OG} \wedge \vec{g}) \cdot \hat{u}_z = (\vec{g} \wedge \hat{u}_z) \cdot \vec{OG} = g \hat{u}_x \cdot \vec{OG}$$

On en déduit donc que le **point G est sur l'axe Oy** .

2. Le long d'un des arcs de cercle, la force de Laplace qui s'exerce sur un élément $d\vec{\ell} = dl \hat{u}_\theta$ s'écrit $d\vec{F}_L = id\vec{\ell} \wedge \vec{B} = idlB \hat{u}_r$. Donc son moment par rapport à O , $d\vec{M}_L(O) = R \hat{u}_r \wedge idlB \hat{u}_r$, est nul. Donc le moment résultant sur les arcs l'est aussi : $\vec{M}_{L \text{ arcs}}(O) = \vec{0}$.
3. Il reste alors

$$\vec{M}_L(O) = \int_{A_3}^{A_4} \vec{OM} \wedge (id\vec{\ell} \wedge \vec{B}) = \int_{d_1+l/2}^{d_1-l/2} x \hat{u}_x \wedge (idx \hat{u}_x \wedge \hat{u}_z B) = -\hat{u}_y iB \left[\frac{x^2}{2} \right]_{d_1+l/2}^{d_1-l/2} = -\hat{u}_y \frac{iB}{2} (2d_1)(-l),$$

donc finalement : $\vec{M}_L(O) = iB d_1 l \hat{u}_y$. À l'équilibre la somme des moments est nulle :

$$\vec{0} = \vec{M}_L(O) + \vec{M}_{\text{pes}}(O) = \vec{M}_L(O) + \vec{OG} \wedge m_0 \vec{g} + \vec{OD} \wedge m \vec{g} = (iB d_1 l + 0 - mg d_2) \hat{u}_z \Leftrightarrow B = \frac{mg d_2}{i l d_1}$$

4. La sensibilité sur B est reliée à celle sur m par la relation : $\delta B = \frac{gd_2}{i l d_1} \delta m = 1.10^{-3} \text{T}$.

Cette valeur est en ordre de grandeur 10 fois plus grande que le champ magnétique terrestre, mais 100 à 1000 fois plus faible que le champ créé par un aimant permanent en fer, néodyme et cobalt. Donc **cette balance peut mesurer précisément un champ d'aimant sans être parasitée par le champ magnétique terrestre**.

II.2. Utilisation d'une boussole

a. Étude générale

5. a) On applique le théorème du **moment cinétique** à l'aiguille aimantée au **point G fixe** dans le référentiel terrestre galiléen :

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \hat{u}_z = \vec{M}_m \wedge \vec{B} = -\mathcal{M}_m B \sin \alpha \hat{u}_z \Leftrightarrow \ddot{\alpha} + \kappa B \sin \alpha = 0 \quad \text{avec} \quad \kappa = \frac{\mathcal{M}_m}{J}$$

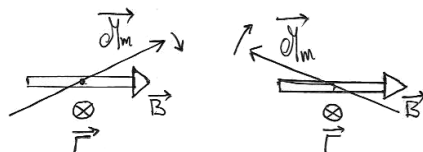
b)

À l'équilibre, $\ddot{\alpha} = 0$, donc $\sin \alpha = 0$, donc $\alpha = 0$

ou $\alpha = \pi$.

Lorsqu'on s'écarte un peu de cette position $\alpha = 0$ (resp. $\alpha = \pi$), le moment résultant $\vec{\Gamma}$ conduit à ramener (resp. éloigner) l'aiguille vers (de) cette position d'équilibre (cf ci-contre).

Donc $\alpha = 0$ est **stable**, $\alpha = \pi$ est **instable**.



- c) Pour α petit, $\sin \alpha \approx \alpha$, donc l'équation différentielle vérifiée est : $\ddot{\alpha} + \kappa B \alpha = 0$.
La solution de cette équation est :

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega_0 t) \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\kappa B}$$

6. Le champ magnétique uniforme créé dans le volume intérieur d'un solénoïde infini est $\vec{B} = \mu_0 n i \hat{u}_z$, où n est le nombre de spires par unité de longueur. Donc $[B] = [\mu_0] \cdot L^{-1} \cdot I$. Par conséquent, la seule expression possible pour B_0 parmi les expressions proposées, est : $B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$.
7. Le champ magnétique en un point repéré par $x = XR$ est la somme des champs magnétiques créés par chacune des deux bobines. D'après l'expression fournie, on obtient :

$$\vec{B}(X) = N \vec{B}_0 \frac{8}{5\sqrt{5}} \left[2 - 2 \frac{144}{125} X^4 \right] + o(X^4) \quad \text{donc} \quad \vec{B}(X) = \vec{B}(0) \left[1 - \frac{144}{125} X^4 \right] + o(X^4)$$

avec $\vec{B}(0) = \frac{8\mu_0 N I}{5\sqrt{5}R} \hat{u}_x$. En X_{max} , la variation relative par rapport au centre est de 2% :

$$\frac{B(X_{max}) - B(0)}{B(0)} = -\frac{144}{125} X_m^4 = -\frac{2}{100} \Leftrightarrow X_m = \pm 0,36$$

Les variations du champ sont donc inférieures à 2% dans la zone $[-54 \text{ mm}; +54 \text{ mm}]$.
La valeur du champ magnétique en O est : $B(0) = 1,2 \times 10^{-3} \text{T}$.

8. Comme $\omega_0 = \sqrt{\kappa B}$, $\kappa = \frac{4\pi^2}{B(0)T^2} = 3,7 \times 10^5 \text{ s}^{-2} \cdot \text{T}^{-1}$.

b. Applications au champ magnétique terrestre

9.

- a) D'après le schéma ci-contre, on peut relier $\tan i$ à B_r et B_θ soit (comme i est compté positif...) :

$$\tan i = -\frac{B_r}{B_\theta} = -2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \Leftrightarrow \tan \theta = -\frac{2}{\tan i}$$

d'où $\theta = 135,7^\circ$. Cela correspond à peu près à la latitude de Paris car $135,7 - 90 = 45,7^\circ$.

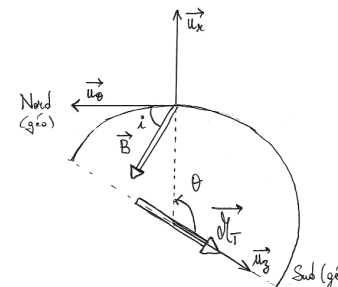
- b) La vraie latitude de Paris étant $48^\circ 52' = 48,9^\circ$, on a un **écart de $3,2^\circ$ entre l'axe des pôles géographiques et celui des pôles magnétiques**.

10. a) Lorsque l'axe de rotation est vertical, la boussole oscille avec une pulsation reliée à la composante horizontale B_θ du champ magnétique soit $\omega = \sqrt{\kappa B_\theta} \Leftrightarrow B_\theta = \frac{4\pi^2}{T'^2 \kappa}$ en notant $T' = 2,31 \text{ s}$ la nouvelle période.

Par ailleurs, l'intensité totale du champ s'écrit

$$\|\vec{B}\| = \frac{B_\theta}{\cos i} = \sqrt{1 + \tan^2 i} B_\theta \Rightarrow \|\vec{B}\| = \frac{4\pi^2}{T'^2 \kappa} \sqrt{1 + \tan^2 i} = 4,6 \times 10^{-5} \text{T}$$

- b) De plus $B_\theta = \frac{\mu_0 \mathcal{M}_T \sin \theta}{4\pi R_T^3}$, d'où $\mathcal{M}_T = \frac{16\pi^3 R_T^3}{T'^2 \kappa \mu_0 |\sin \theta|} = 7,6 \times 10^{22} \text{ A} \cdot \text{m}^2$.

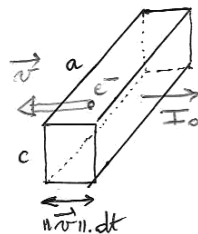


II.3. Utilisation d'une sonde à effet Hall

11.

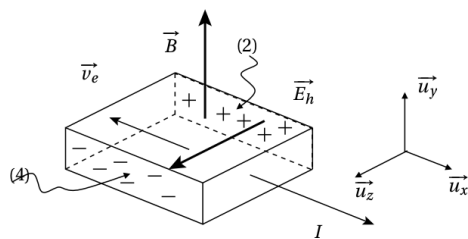
Pendant une durée dt , les charges qui vont traverser une section plane $x = \text{constante}$ sont comprises dans un petit cylindre de base ac et de hauteur $\|\vec{v}\|.dt$, qui contient donc une quantité de charge $\delta q = -neac\|\vec{v}\|.dt$. Ainsi, le courant porté par ce mouvement (orienté dans l'autre sens) s'écrit

$$I_0 = -\frac{\delta q}{dt} = neac\|\vec{v}\| \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{v} = -\frac{I_0}{neac} \hat{u}_x} \quad \text{et} \quad \boxed{\|\vec{v}\| = 3,2 \times 10^4 \text{ m.s}^{-1}}.$$



12.

La force magnétique subie par l'électron est $\vec{f} = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$. En régime permanent les électrons ont une vitesse $\vec{v} = v\hat{u}_x$ ($v < 0$) donc $\vec{f} = -evB\hat{u}_z$ est selon \vec{u}_z . Ainsi les électrons se déplacent vers la face (4), qui se charge négativement. Par conservation de la charge la face (2) se charge positivement (pas de charges volumiques dans un conducteur, qui doit rester neutre localement en ARQS, d'où l'apparition de charges en surface uniquement).



13. Pour que les électrons voient leur vitesse inchangée en régime permanent par rapport à l'absence de champ magnétique, il est nécessaire que la somme des forces magnétique et due à l'effet Hall se compensent :

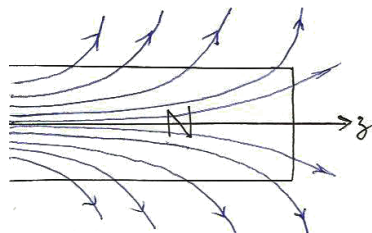
$$\vec{0} = -e\vec{E}_h - e\vec{v} \wedge \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_h = -\vec{v} \wedge \vec{B} \quad \text{donc} \quad \boxed{\vec{E}_h = -vB\hat{u}_z = \frac{I_0 B}{neac} \hat{u}_z}.$$

14. On en déduit la tension de Hall $\boxed{u_h = \gamma B}$ avec $\boxed{\gamma = \frac{u_h}{B} = \frac{-I_0}{neac} = -95 \text{ V.T}^{-1}}$.

III. Le haut-parleur électrodynamique (d'après CCP PC 2016)

III.1. Mise en équations

- Comme indiqué sur le schéma ci-contre, les lignes de champ sortent du cylindre pour rejoindre le pôle Sud à mesure que l'on progresse vers l'extrémité du pôle Nord de l'aimant. Par conséquent le flux sortant sur la surface latérale du cylindre est strictement positif. Or le flux magnétique sortant à travers une surface fermée est toujours nul.



Il y a donc nécessaire un différentiel de flux axial $\Phi(z)$ à travers deux sections planes ($z = \text{constante}$) différentes, pour compenser ce flux sortant latéral.

Plus précisément, si la section est orientée dans le sens de \vec{u}_z , le flux $\Phi(z)$ décroît quand z augmente. Ceci est avec l'écartement croissant des lignes de champ, qui indique une baisse de l'intensité du champ.

- On met en équation l'analyse précédente. Le flux sortant total à travers le petit cylindre d'axe Oz entre z et $z + dz$ (de surface latérale $2\pi R dz$) s'écrit¹ :

$$0 = -\Phi(z) + \Phi(z + dz) + B_r(R, z) 2\pi R dz \Leftrightarrow d\Phi(z) = -2\pi R dz B_r(R, z)$$

- L'application d'une tension $u(t)$ génère un courant. Les spires sont alors soumises à une force de Laplace dont la résultante est dirigée selon \vec{u}_z . Le déplacement qui s'ensuit selon z implique donc un **variation du flux axial dans chaque spire, d'où une force électromotrice (fem)**.

D'après la loi de Faraday, pour une spire unique située en z , cette variation implique une fem $-\frac{d\Phi}{dt} = \dot{z} B_r(R, z) 2\pi R$, où $2\pi R$ représente la longueur de fil constituant cette spire, et $\dot{z} = v$. Lorsque l'on somme toutes les fem induites dans chaque spire, on factorise le champ $B_r(R, z) \approx B_r(R)$ en supposant qu'il varie peu sur le domaine considéré, ce qui fait donc apparaître la longueur totale du bobinage ℓ : $e = v B_r(R) \ell$.

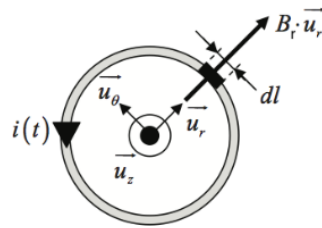
- La loi des mailles s'écrit alors : $u(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt}(t) - e(t)$.

- La force élémentaire sur l'élément $d\vec{\ell}$ s'écrit :

$$d\vec{F}_L = id\vec{\ell} (B_z(R, z)\vec{u}_r - B_r(R)\vec{u}_z)$$

Par symétrie, la composante selon \vec{u}_r va s'annuler en sommant les contributions sur toute la bobine. Il ne reste que la composante selon \vec{u}_z , qui vaut (sous la même hypothèse que précédemment, à savoir $B_r(R, z)$ lentement variable) :

$$\vec{F}_L = -iL B_r(R)\vec{u}_z$$



- Le théorème de la **résultante cinétique** dans le référentiel terrestre du laboratoire considéré **galiléen** s'écrit comme suit, en notant respectivement \vec{R} et \vec{P} la réaction du support et le poids de l'équipage :

$$m\ddot{z}\vec{u}_z = -\lambda\dot{z}\vec{u}_z - kz\vec{u}_z - iL B_r\vec{u}_z + \vec{R} + \vec{P} \Rightarrow \vec{R} + \vec{P} = \vec{0} \text{ et } m\ddot{z} + \lambda\dot{z} + kz = -iLB_r$$

III.2. Régime sinusoïdal forcé

- Les équations électrique et mécanique précédemment établies sont linéaires à coefficients constants, donc elles sont vérifiées par les grandeurs complexes associées :

$$\underline{u} = R\underline{i} + j\omega L\underline{i} - \underline{e} \text{ avec } \underline{e} = Bl\underline{v} = Blj\omega \underline{z} \text{ et } \underline{z} \left((j\omega)^2 m + j\omega\lambda + k \right) = -Bl\underline{i}$$

1. Il y a avait 2 coquilles à cet endroit dans l'énoncé... faciles à identifier toutefois compte tenu du mauvais placement des éléments différentiels d...

$$\text{D'où } \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \underline{Z}(\omega) = R + j\omega L + \underline{Z}_m(\omega) \text{ avec } \underline{Z}_m(\omega) = \frac{B^2 \ell^2 j\omega}{(j\omega)^2 m + j\omega\lambda + k}$$

Remarque : Le dernier terme s'appelle l'impédance mottonnelle.

- On a $\underline{Z}_m(\omega) = \frac{R_m}{1 + j\left(\frac{m}{\lambda}\omega - \frac{k}{\lambda\omega}\right)} = \frac{R_m}{1 + jR_m\left(C_m\omega - \frac{1}{L_m\omega}\right)}$ en posant $R_m = \frac{B^2 \ell^2}{\lambda}$, $C_m = \frac{m}{B^2 \ell^2}$ et $L_m = \frac{B^2 \ell^2}{k}$. On

en déduit que $R_T(\omega) = \Re\{\underline{Z}(\omega)\} = R + \frac{R_m}{1 + R_m^2\left(C_m\omega - \frac{1}{L_m\omega}\right)^2}$. On obtient $C_m = 2,5 \times 10^{-4} \text{ F}$.

- $R_T(\omega)$ est maximale pour $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{L_m C_m}}$, et vaut alors $R_T(\omega_r) = R + R_m$.

- On peut lire sur le graphe $R = R_T(\omega = 0) = 8,0 \Omega$, ainsi que le maximum $R + R_m = 24 \Omega$ donc $R_m = 16 \Omega$.

La pulsation de résonance est lue $\omega_r = 5,6 \times 10^2 \text{ rad.s}^{-1}$, d'où l'on déduit $L_m = \left(\omega_r^2 C_m\right)^{-1} = 13 \text{ mH}$.

On en déduit $\lambda = \frac{B^2 \ell^2}{R_m} = 1,0 \text{ kg.s}^{-1}$ et $k = \frac{B^2 \ell^2}{L_m} = 1,3 \times 10^3 \text{ kg.s}^{-2}$.

III.3. Bilan de puissance

- Les équations électrique et mécanique permettent d'établir les bilans en puissance associés :

$$ui = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) - Blvi \text{ et } \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kz^2 \right) + \frac{1}{2} v^2 = -Blvi$$

En sommant ces équations, la puissance cédée par la fem induite $Blvi$ et la puissance de la force de Laplace $-Blvi$ se compensent, ce qui est l'expression du **couplage électromécanique**. On obtient alors

$$\mathcal{P} = ui = Ri^2 + \lambda v^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kz^2 \right)$$

En régime sinusoïdal forcé de période T , les énergie magnétique $\frac{1}{2} Li^2$, cinétique $\frac{1}{2} mv^2$ et potentielle élastique $\frac{1}{2} kz^2$ sont $\frac{T}{2}$ -périodiques, donc leur dérivée est de valeur moyenne nulle. Ainsi en moyenne $\langle ui \rangle = R \langle i^2 \rangle + \lambda \langle v^2 \rangle$. Le terme $\lambda \langle v^2 \rangle$ correspond à la puissance rayonnée sous forme d'ondes sonores, donc c'est la puissance utile. $\langle \mathcal{P} \rangle$ est la puissance à fournir.

- Le rendement est le rapport entre la puissance utile et la puissance à fournir :

$$\eta = \frac{\lambda \langle v^2 \rangle}{\langle \mathcal{P} \rangle} = \frac{\langle \mathcal{P} \rangle - R \langle i^2 \rangle}{\langle \mathcal{P} \rangle} = \frac{R_T \langle i^2 \rangle - R \langle i^2 \rangle}{R_T \langle i^2 \rangle} \text{ donc } \eta = \frac{R_T - R}{R_T}$$

- D'après 8., on a $\eta = 1 - \frac{R}{R_T} = 1 - \left(1 + \frac{R_m/R}{1 + R_m^2\left(C_m\omega - \frac{1}{L_m\omega}\right)^2} \right)^{-1} = \left(\frac{R}{R_m} \left(1 + R_m^2\left(C_m\omega - \frac{1}{L_m\omega}\right)^2 \right) + 1 \right)^{-1}$

donc $\eta \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0$. Ce résultat était prévisible car à basse fréquence il ne peut plus y avoir d'induction donc d'émission d'ondes sonores.

- De même on obtient $\eta \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0$, donc un **rendement nul à haute fréquence**.

- Le rendement est maximal en $\omega = \omega_r = \frac{1}{\sqrt{L_m C_m}}$ et vaut alors $\eta_{\max} = \frac{R_m}{R + R_m} = 0,67$.

Cela correspond à une fréquence de résonance $f_r = \frac{\omega_r}{2\pi} = 89 \text{ Hz}$, donc située dans les **sons graves**.

- L'étroitesse de cette bande passante empêche de reproduire fidèlement l'information sonore, qui requiert une plage sonore nettement plus large (domaine audible entre 20 Hz et 15-20 kHz). Il faut donc associer **plusieurs haut-parleurs de tailles et de caractéristiques différentes afin de couvrir une partie substantielle du spectre audible**.